УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФБМФ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 75 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент А. А. Хасанов
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Множества в расширенной комплексной плоскости.
2. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.
3. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, голоморфной в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
4. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства.
5. Интегрирование по комплексному переменному: кривые в комплексной плоскости; интеграл по кривой и его свойства; интеграл и первообразная. Формула Ньютона—Лейбница.
6. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для голоморфной функции. Интегральная формула Коши. Интеграл Коши, его дифференцируемость. Теорема Мореры.
7. Степенные ряды, радиус и круг сходимости. Формула Коши–Адамара. Разложение в степенной ряд функции, голоморфной в круге. Теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из голоморфных функций. Теорема единственности для голоморфных функций.
8. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, голоморфной в кольце, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
9. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Определение характера особой точки по структуре главной части ряда Лорана. Теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса и Пикара (последняя без доказательства).
10. Целые функции. Теорема Лиувилля для целых функций.
11. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
12. Теорема об обратной функции. Понятие многозначной функции и её регулярных ветвях. Функция $\mathrm{Ln} z$.
13. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура и его свойства. Критерий выделения регулярных ветвей многозначных функций $\mathrm{Ln} f(z)$ и $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.
14. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
15. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных добей. Формула для $ctgz$.

16. Понятие об аналитическом продолжении элементов друг в друга с помощью конечной цепочки кругов и вдоль контура, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие об аналитической функции. Теорема о монодромии (без доказательства).
17. Особые точки аналитических функций, точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
18. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и многолистность в малом. Принцип максимума модуля голоморфной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Лемма Шварца.
19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной области.
20. Дробно-линейные функции и их свойства.
21. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства.
22. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Принцип соответствия границ (без доказательства).
23. Теорема о стирании разреза. Принцип симметрии при конформных отображениях.
24. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга. Существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

Дополнительная

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Москва : Наука, 1973, 1987; Санкт Петербург : Лань, 2002.
4. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Комплексные числа

§1: 1(2, <u>4</u>); 3(4); 4(2); 5(<u>4</u>); 6; 9(<u>4</u>); 10(7); <u>11</u>; 13; 18.

<u>T.1</u>. Когда четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности?

§2: 10(1,3); 11; 13(2).

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: 11(<u>1</u>, 4); 12(<u>1</u>, 2); 13(<u>1</u>, 2); 17(<u>4</u>, 5, 8).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: 1(2, <u>4</u>, 6); 17(<u>3</u>, 6).

T.2. Найти области в которых функция

$$f(z) = 2|xy| + i(x^2 - y^2), \quad z = x + iy,$$

является голоморфной.

IV. Ряд Тейлора

§7: <u>5</u>; 11(2, <u>3</u>).

V. Теорема единственности

§9: 2(<u>5</u>, 6); 13(<u>5</u>).

T.3. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ голоморфна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

VI. Ряд Лорана

§11: 4(<u>6</u>); 5(4); 7(3); 8(<u>6</u>); 9(2); 10(<u>6</u>).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: 8(<u>3</u>, 7); 15(4, <u>8</u>); 17(9); 20(5).

<u>Т.4</u>. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{z^2 + 4iz - 3}{\left(e^{\frac{2\pi}{z+i}} + 1\right)^2} \sin \frac{3\pi z}{2}.$$

Т.5*. Пусть голоморфная в кольце $G = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A > 0, B > 0$ и $\alpha \in [0,1]$, при которых справедливо неравенства

$$\frac{A}{|z|^\alpha} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall\, z \in G.$$

Определить тип особой точки 0 для функции f при различных α.

52[1*(20)]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 2(11); 5(<u>3</u>, 8).

§14: 2(4, 8, <u>17</u>, 22); 3(1).

§23: 1(<u>3</u>, 8); 2(13, <u>20</u>).

<u>Т.1</u>. Вычислить интеграл

$$\text{a)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3ix + 4}\, dx, \quad \text{b)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x + i)}{x^2 - 2x + 5}\, dx.$$

<u>Т.2</u>. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{dz}{z^2|z-i|^4}$$

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 4; <u>5</u>; 7*.

§17: 3; 4.

§18: 9(<u>2</u>, 3) <u>24</u>; 25; <u>35</u>; 36; 38*; 44*.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 8; 10; <u>24</u>; 25*; <u>37</u>; 42*.

§23: 5(2, <u>4</u>, 8); 6(6, 7, <u>8</u>).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(1, <u>3</u>, 7, 8*).

<u>Т.3</u>. Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

45[6*(17)]

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Конформные отображения

§27: 7(2); 8(<u>2</u>, 4).

§28: 5(рис. 28.31, 28.33, <u>28.39</u>, 28.43); 7; 10 (рис. <u>28.49</u>, 28.53, <u>28.61</u>); 11(рис. 28.64); <u>13</u>; 19(рис. 28.71, <u>28.74</u>, 28.80, <u>28.84</u>, 28.85); 20(рис. 28.88).

II. Принцип симметрии

§29: 3(рис. 29.19, <u>29.22</u>); 4*; 5; 6*(рис. 29.30).

III. Задача Дирихле

Т.1. Решить классическую задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad |z| < 1; \quad u|_{|z|=1} = \frac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}.$$

25[2*(9)]

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент А. А. Хасанов