УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Методы вычисления кратных интегралов. Теоремы Тонелли и Фубини. Замена переменных в кратном интеграле.
2. Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты. Теорема о неявной функции. Гладкие регулярные поверхности в $\mathbb{R}^n$.
3. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое и достаточное условия. Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.
4. Поверхностная мера. Криволинейные и поверхностые интегралы первого рода.
5. Гладкие многообразия, карты и атлас. Касательный вектор и касательное пространство к гладкому многообразию в точке. Гладкое отображение между гладкими многообразиями. Ориентация многообразия. Разбиение единицы на компактном подмножестве многообразия, подчиненное заданному атласу.
6. Полилинейные формы в конечномерном векторном пространстве. Кососимметрические формы. Внешнее произведение форм. Внешняя дифференциальная форма на подмножестве $\mathbb{R}^m$, ее гладкость. Внешний дифференциал гладкой формы.
7. Дифференциальная форма на ориентированном гладком многообразии. Внешний дифференциал формы на ориентированном гладком многообразии. Перенос формы с многообразия в карту.
8. Гладкое многообразие с краем. Край многообразия. Согласованная ориентация для края гладкого многообразия.
9. Интеграл дифференциальной формы по многообразию, корректность определения.
10. Теорема Стокса. Частные случаи формулы Стокса в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$. Поток поля через ориентированную поверхность. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.
11. Замкнутые и точные дифференциальные формы. Лемма Пуанкаре.
12. Подалгебры $C(X)$. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Tu L.* An introduction to manifolds, Springer-Verlag, New York, 2011.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.

<u>*Дополнительная*</u>

3. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011 https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki

4. *Натанзон С. М.* Введение в теорию гладких многообразий. — Москва : МЦНМО: НМУ, 2020.
5. *Скопенков А. Б.* Основы дифференциальной геометрии в интересных задачах— Москва : МЦНМО, 2009, 2010, 2016. arxiv:0801.1568.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 сентября)

I. Сведение кратного интеграла к повторным

§8: 80(4); 83(14); 85(2); 133(4); 135(1); 139(3); 175(5), 176(2).

Т.1. Вычислите $\displaystyle\int\limits_{(0;+\infty)^2} \frac{\sin \pi x}{(y + e^x|\sin \pi x|)^2} d\mu(x, y)$.

II. Кратные интегралы в криволинейных координатах

§8: 102(4); 107(4); <u>110(3)</u>; 124(1,3); 144(<u>3</u>,6); 146(3); 148(3); 181*.

§9: 13(6); 15(4); 16(6); 19(7); 21; 63(6)*.

Т.2. Вычислите $\displaystyle\int_E \bigl(y^3 + \sin(y^2 e^y) \sin x\bigr)\, d\mu(x, y)$, где E – внутренность треугольника с вершинами $(0; 0)$, $(1; 1)$ и $(-1; 1)$.

<u>**Т.3**</u>. Пусть K – компакт в $\mathbb{R}^n$ и $h > 0$. Докажите измеримость и найдите меру конуса $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon\ x \in \bigl(1 - \frac{y}{h}\bigr)K,\ 0 \leqslant y \leqslant h\}$.

Т.4. Пусть квадратичная форма $k(x) = (Ax, x)$ в $\mathbb{R}^n$ положительно определена. Вычислите $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-k(x)} d\mu(x)$.

(26+2*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 27 октября – 2 ноября)

I. Гладкие отображения и неявные функции

§3: 60(2); 65; 75.

§4: 43(4).

Т.1. Рассмотрим уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – множество таких $(a_1, \ldots, a_n)$, что уравнение имеет n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность, в которой $x_i = x_i(a_1, \ldots, a_n)$, причем зависимость от коэффициентов a_i гладкая. Докажите, что U является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Т.2. Выясните, составляет ли пара функций $(x; x^2 + y^2)$ (гладкую регулярную) криволинейную систему координат на плоскости $(x; y)$

а) в окрестности точки $(1; 0)$? б) в окрестности точки $(0; 1)$?

Т.3. Пусть функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ класса C^1 $(m \leqslant n)$ такая, что $f(a) = 0$ и $\mathrm{rk} Df_a = m$. Докажите, что существует такая окрестность U точки a и диффеоморфизм $\varphi\colon V \to U$, что $f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) = (x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$ для всех $x \in V$.

Т.4. Докажите, что открытый круг на плоскости $\{x^2 + y^2 < 1\}$ диффеоморфен всей плоскости.

Т.5*. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки p, а дифференциалы функций $f_2, \ldots, f_k$ линейно независимы в p, то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

§3: 85(6); <u>86</u>; 91*.

§4: 51(1); 53(2); 54*.

II. Гладкие регулярные поверхности

<u>Т.6</u>. *Тором* T^2 называется фигура, образованная вращением окружности $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ $(0 < r < R)$ плоскости Oxz вокруг оси Oz. Покажите, что T^2 является гладкой регулярной поверхностью в $\mathbb{R}^3$.

Т.7. Покажите, что часть конуса $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geqslant 0$, не является гладкой регулярной поверхностью в $\mathbb{R}^3$.

Т.8. Гладкая регулярная поверхность $S \subset \mathbb{R}^4$ задана как множество решений системы

$$S\colon \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 + w^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Найдите размерность касательного пространства T_pS в точке $p(1; 1; 1; 1)$. Задайте пространство T_pS уравнениями.

T.9. Пусть S – гладкая регулярная поверхность в $\mathbb{R}^n$, точка $p_0 \in \mathbb{R}^n$, и функция $f\colon S \to \mathbb{R}$, $f(p) = |p - p_0|^2$. Покажите, что f является гладкой, и найдите ее дифференциал df_p.

III. Экстремумы функций многих переменных

§5: 2(3); 9; <u>10</u>; 15(2); 18(3).

§5: 21(2); 26(2); 22(2); 31(4); 35*; 36.

T.10. Исследуйте на условный экстремум функцию $A \mapsto \mathrm{tr} A$ при условии $\det A = 1$ для вещественных симметрических матриц 3×3.

IV. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

§10: 8; 9; <u>17</u>; 81(3).

§9: 28; 35; 51.

§11: 2(2); 11; 14.

<u>T.11</u>. Вычислите площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, заключенной между двумя параллельными плоскостями $z = c$, $z = c + h$, $(c, c + h \in \in [-R, R])$.

(38+4*)

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 декабря)

I. Дифференциальные формы

T.1. Найдите значение формы $\omega = 2(x^2 + y^2)dx \wedge dy + (2x + 3z)dy \wedge dz$ на векторах $(1; 0; 1)$ и $(0; 1; 0)$ в точке $(1; 1; 1)$.

T.2. Пусть $\alpha = xdx - ydy$, $\beta = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$, $\gamma = zdx$ на $\mathbb{R}^3$. Вычислите $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $d\beta$, $\alpha \wedge d\gamma$.

<u>T.3</u>. Для $\omega = \dfrac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$

а) проверьте, что $\omega_r(v; w) = \frac{(v \times w, r)}{|r|^3}$, где $r = (x; y; z)$;

б) вычислите $d\omega$.

T.4. Пусть $U = \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty)$ и отображение $\varphi\colon U \to U$, $\varphi(x_1, x_2, x_3) = = (e^{x_3}x_1, e^{-x_3}x_2, x_3^2)$, и пусть $\omega = y_1^2 y_2 dy_1 \wedge dy_3 \in \Omega^2(U)$. Вычислите $\varphi^*(\omega)$, $d\omega$, $\varphi^*(d\omega)$ и $d\varphi^*(\omega)$.

T.5. Запишите дифференциальные формы $dx \wedge dy \wedge dz$ и $xdy \wedge dz$

а) в цилиндрических координатах;

б) в сферических координатах.

T.6. Найдите $i^*\omega$ для формы $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, где i – каноническое вложение единичной окружности в $\mathbb{R}^2$.

II. Многообразия

T.7. Проверьте по определению, является ли следующее множество многообразием (со стандартной топологией и гладкой структурой, индуцированной с плоскости):

а) окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$;

б) пара пересекающихся прямых $\{x^2 - y^2 = 0\}$.

в) график функции $y = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

T.8. Постройте координатный атлас на сфере $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, состоящий из двух карт.

T.9. Докажите, что $SL(n, \mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = 1\}$ является многообразием. Найдите касательное пространство к $SL(n, \mathbb{R})$ в точке E (единичная матрица).

T.10. Докажите, что выбор ориентации на двумерной регулярной поверхности в $\mathbb{R}^3$ эквивалентен выбору гладкого поля единичных нормалей к поверхности.

III. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода

§10: 21; 30(1); 43; 50; 46; 47*; 104(2).
§11: 34; 42; 47(1); 52(2,3); 54; 65(2); 64.

T.11. а) Вычислите $\int_M x^2y^4z^2\, dy \wedge dz$ по внешней боковой стороне конуса $M = \{\sqrt{x^2+y^2} = z < 1\}$.

б) Вычислите $\int_M e^{2x}\operatorname{sh}(y^4)\, dx\wedge dy$ по внешней боковой стороне цилиндра $M = \{x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$.

T.12. Вычислите

$$\int_M xe^{xy+1}dx \wedge dy + (\operatorname{arctg}^3 y + x + 2)dy \wedge dz + x^2dz \wedge dx$$

по внешней стороне полуцилиндра $M = \{x^2 + y^2 = 1, x > 0,\ 0 < z < 1\}$.

T.13. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant x_4 \leqslant 1\}$ с ориентацией, индуцированной $\mathbb{R}^4$. Вычислите $\int_{\partial M} |x|^2\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Т.14. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму является точной формой.

<u>Т.15</u>. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где γ – простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки. Докажите, что форма $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ замкнута, но не точна в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Т.16. Докажите, что любая дифференциальная форма степени n на $\mathbb{R}^n$

а) замкнута, б) точна.

Т.17*. Покажите, что ограничение формы $\omega = \frac{xdy-ydx}{z^2}$ на любой конус с центром в начале координат является замкнутой формой.

IV. Градиент, ротор, дивергенция

§12: 13; 15(3,<u>5</u>); 38(3); 40(2); 41(4,6,7); <u>42(2)</u>; 49(<u>5</u>,6) (в координатах проверять не обязательно); 50(5); 112.

V. Подалгебры $C(X)$

Т.18. Выясните, замыкание каких из следующих множеств совпадает с $C([0,1])$:

а) $\{f \in C([0,1])\colon\ f(0) = 0\}$;

б) $\{f \in C([0,1])\colon\ f(0) \neq 0\}$;

в) $\{f \in C([0,1])\colon\ \int_0^1 f(x)dx = 1\}$;

г) $\{f \in C([0,1])\colon\ f$ дифференцируема на $(0,1)$ и $f'(1/2) = 0\}$.

Т.19. Пусть функция $f\colon [0;1] \times [0;1] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся непрерывные функции u_i, $v_i\colon [0;1] \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, такие что для любых x, $y \in [0;1]$, выполнено

$$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} u_i(x)v_i(y) \right| < \varepsilon.$$

Т.20. Пусть A – всюду плотное векторное подпространство $C([0,1])$, и

$$B = \{F\colon F(x) = \int_0^x f(t)dt,\ f \in A\}.$$

Докажите, что $\overline{B}$ совпадает с $C_0([0,1]) = \{g \in C([0,1])\colon g(0) = 0\}$.

(46+2*)

Задания составили: к. ф.-м. н. О. А. Загрядский
к. ф.-м. н. В. В. Редкозубов