УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
к. ф.-м. н., доцент С. Р. Свирщевский
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.

2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

<u>*Дополнительная*</u>

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 октября)

I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

С. 2: <u>2</u>; 22; 26; 31; 61; <u>73</u>.
С. 3: 30; <u>31</u>; 60; <u>94</u>. **Ф.** 163; 181*.
С. 4: 10; 22; 54.

<u>1</u>. Решить уравнение: $2x(\sqrt{x}+1)y' + y^2 + \sqrt{x} = 0$.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 9; <u>19</u>; 35; 39; 54; 67*.

2. Решить задачу Коши:
$y'' + 2y' = \frac{y'^2}{y+1} + \frac{y'}{x}\ln(\frac{y+1}{y'}), \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{2}{e}.$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225 (а, б, в, г); 228 (а, б); 230; <u>231</u>; 233.

<u>3</u>. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$
б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

4*. Доказать, что любое решение, задачи Коши $y' = x - y^2, \quad y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(a, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. <u>266</u>, <u>282</u> (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 289.

С. 6: 25; 65.

5. Решить уравнение $2x(1+y')y' = y$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые. Выяснить, имеет ли это уравнение решение, удовлетворяющее условиям $y(2) = 1, \quad y(8) = -2$.

<u>6</u>. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1-y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

$\boxed{37+3^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8—14 декабря)

I. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 4; 9; 12; <u>24</u>; 37; <u>45</u>; 52; 64; <u>155</u>; 163; 197; 202.

Ф. 613; 617; 618.

1. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ уравнение $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

2*. Найти $\lim\limits_{\epsilon \to +0} y(x, \epsilon)$ и $\lim\limits_{\epsilon \to -0} y(x, \epsilon)$, где $y(x, \epsilon)$ решение краевой задачи $\epsilon y'' + y' = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2$ в случае:
а) $f(x) = 2$; б) $f(x) = 1$.

II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 9; 12; 16; 27; 45; 69; 77; <u>88</u>; 137; 155; 174.

III. Матричная экспонента

С. 11: 120; 124; 129 (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 1$).

3. Решить задачу Коши: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad \vec{x}(0) = \overrightarrow{x_0}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$,

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец, $\overrightarrow{x_0}(t)$ — искомая вектор-функция.

4*. Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

IV. Операционный метод

С. 8: 173; <u>182</u>.

С. 11: <u>190</u>; 194.

$\boxed{36+2^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Е. А. Умнов