

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **1**
семестр: **1**

Трудоёмкость:
лекции — 60 часов
практические (семинарские)
занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120
Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число ε . Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности (в том числе как \limsup , \liminf .) Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне (в терминах последовательностей) и по Коши (в терминах окрестностей), их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке, — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Сравнение величин (символы o , O , \sim). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость

функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Роля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.
14. Линейные нормированные, евклидовы, метрические пространства. Пространство \mathbb{R}^n . Открытые и замкнутые множества. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Внутренность, замыкание и граница множества. Компактные множества и их свойства. Критерий компактности в \mathbb{R}^n . Последовательности в метрических пространствах. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Полные метрические пространства. Полнота \mathbb{R}^n .
15. Предел функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Критерий Коши существования предела.

16. Непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции. Непрерывность на метрическом пространстве через прообраз открытого множества. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса.
17. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Оценка вращения вектор-функции через производную. Вектор-функции ограниченной вариации. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т. 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: Учебное пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Действительные числа

С1, §4: 1(2); 2.

Т.1. Доказать для $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ выполняется

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Т.2. Найти сумму $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$.

Т.3. Найти суммы:

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$;

б)* $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(4); 13(4); 15(2); 18(6); 30(3); 31(2); 32(2, 7).

Т.4. Изобразите на плоскости множество точек, заданное неравенством

$$\operatorname{Re} \left(\frac{2-i}{z} - \frac{1-2i}{\bar{z}} \right) - \operatorname{Im} \left(\frac{2+i}{z} + \frac{1+2i}{\bar{z}} \right) \leq 2.$$

III. Производная

С1, §13: 32; 74; 117; 149.

Т.5. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\arccos \sqrt{x} + \sin^2(3x-1)}{5x^3 + \ln^2(1+e^x)} \right)^{x^2 \operatorname{sh} x}.$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(5); 279(2); 300(3).

C1, §8: 2(2) (по определению); 13(3); 17; 18; 25(1); 27; 28^{*}; 46.

C1, §8: 91; 53(3); 74(2); 7; 71(1); 60 (для всех $a > 0$); 67; 63(4).

C1, §8: 119; 121; 116(2); 117(1); 141(2); 143(3); 147(4); 158; 164(1); 220^{*}; 246(1, 2^{*}, 3^{*}).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

C1, §7: 218(5); 219(4).

C1, §9: 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(1); 27(2); 30(4); 33(4); 35(4); 61.

C1, §10: 5(2) (по определению); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 46; 47^{*}; 66^{*}; 76.

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	C1, §4: 1(2); 2; Т.1; Т.2; Т.3(а, б [*]). C1, §5: 4(4); 13(4); 15(2); 18(6); 30(3); 31(2); 32(2, 7); Т.4.
2 неделя	C1, §13: 32; 74; 117; 149; Т.5. C1, §7: 275(4); 276(5); 279(2); 300(3). C1, §8: 2(2); 13(3); 17; 18; 25(1); 27; 28 [*] ; 46.
3 неделя	C1, §8: 91; 53(3); 74(2); 7; 71(1); 60; 67; 63(4). C1, §8: 119; 121; 116(2); 117(1); 141(2); 143(3); 147(4); 158.
4 неделя	C1, §8: 164(1); 220 [*] ; 246(1, 2 [*] , 3 [*]). C1, §7: 218(5); 219(4). C1, §9: 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(1); 27(2); 30(4).
5 неделя	C1, §9: 33(4); 35(4); 61. C1, §10: 5(2); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 46; 47 [*] ; 66 [*] ; 76.

70 + 7^{*}

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

C1, §13: 197(3); 201(2); 214(2); 173; 179(4).

C1, §14: 10(1).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

C1, §15: 1(7); 10(1); 13(2); 14(3); 22(2); 24(5, 9, 13); 25(3, 5, 10); 26(2, 4^{*}).

III. Теоремы о среднем

C1, §16: 5; 15(2); 19; 33; 30; 20^{*}.

IV. Формула Тейлора

C1, §9: 50; 51.

Т.1. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \rightarrow 0$.

Т.2. Докажите, что если при $x \rightarrow 0$ $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow 0$.

Т.3. При каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 2x + 1 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \rightarrow x_0$?

Т.4. Разложите по формуле Тейлора в точке $x = 0$ с точностью до $o(x^5)$ функцию $(x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

С1, §18: 2(8); 3(2, 5); 4(9); 5(5); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7).

Т.5. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \operatorname{arcsin} x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов

С1, §17: 27; 47; 64; 76; 80*.

С1, §19: 7(1); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(3); 58(2)*.

Рекомендации по решению

второго домашнего задания по неделям

1 неделя	С1, §13: 197(3); 201(2); 214(2); 173; 179(4). С1, §14: 10(1). С1, §15: 1(7); 10(1); 13(2); 14(3); 22(2).
2 неделя	С1, §15: 24(5, 9, 13); 25(3, 5, 10); 26(2, 4* [*]). С1, §16: 5; 15(2); 19; 33; 30; 20*.
3 неделя	С1, §9: 50; 51; Т.1; Т.2; Т.3; Т.4; Т.5. С1, §18: 2(8); 3(2, 5); 4(9); 5(5); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7).
4 неделя	С1, §17: 27; 47; 64; 76; 80*. С1, §19: 7(1); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(3); 58(2)*.

50 + 4*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

С1, §12: 2(1); 3(4, 9); 4(3, 8*); 7; 9; 17; 20; 23; 25.

Т.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I , то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в)* если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I , то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

II. Исследование функций

С1, §20: 2(3); 20(4); 23(8); 35*; 39(5); 42(2); 49(4); 69(2, 5); 71(4)*.

III. Построение графиков функций

С1, §21: 4(4); 5(2); 9(1); 10(3); 12(1, 8); 13(9); 15(5); 23(4)*; 31(1)*.

IV. Элементы дифференциальной геометрии, вектор-функции ограниченной вариации

С1, §24: 48; 51; 78(3); 80(3); 81(1); 109(2); 122(1); 14*, 118*.

Т.2. Выяснить, при каких значениях параметра $\alpha \in \{1, 2\}$ функция $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$.

Т.3. Представить в виде разности двух неубывающих на $[0, 2\pi]$ функций функцию $y = \sin x$.

Т.4. Доказать, что функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует неубывающая ограниченная на $[a, b]$ функция φ такая, что если $a \leq x < y \leq b$, то

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

V. Множества в метрических пространствах

Т.5. Для множества $M \subset \mathbb{R}$, $M = [1, 2) \cup \{3\} \cup ([4, 5) \cap \mathbb{Q})$ найдите все:

- а) внутренние точки;
- б) точки прикосновения;
- в) граничные точки.

Рассмотреть случаи обычной и дискретной метрик.

Т.6. Докажите, что если множество X действительных чисел состоит только из изолированных точек, то оно не более чем счётно.

Т.7. Будет ли прямая \mathbb{R} метрическим пространством, если расстояние определить как:

- а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$;
- б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$?

Т.8. Может ли замкнутый шар в метрическом пространстве не быть замыканием открытого шара с тем же центром и радиусом?

**Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям**

1 неделя	С1, §12: 2(1); 3(4, 9); 4(3, 8 [*]); 7; 9; 17; 20; 23; 25; Т.1(а, б, в [*]).
2 неделя	С1, §20: 2(3); 20(4); 23(8); 35 [*] ; 39(5); 42(2); 49(4); 69(2, 5); 71(4) [*] . С1, §21: 4(4); 5(2); 9(1); 10(3); 12(1, 8).
3 неделя	С1, §21: 13(9); 15(5); 23(4) [*] ; 31(1) [*] . С1, §24: 48; 51; 78(3); 80(3); 81(1); 109(2); 122(1); 14 [*] , 118 [*] .
4 неделя	: Т2; Т3; Т4; Т5; Т6; Т7; Т8.

42 + 8*

Задания составили:

д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов

к. ф.-м. н., доцент Н. Г. Павлова