

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**

по направлению

подготовки:

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
10.05.01 «Компьютерная безопасность»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школы: **для всех, кроме физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **высшей математики**

курс: 1

семестр: 1

Трудоёмкость:

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров

к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий

к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов

к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский

к. ф.-м. н., доцент О. Г. Подлипская

к. п. н., доцент Д. А. Терёшин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 20 мая 2021 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.
2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.
3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. *Матрица Грама*¹. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами. *Биортогональный (взаимный) базис*.²
4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения.
5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.
6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. *Пучок прямых на плоскости*³. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. *Расстояние между двумя прямыми в пространстве*⁴.
7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпен-

¹Для потока И.А. Чубарова.

²Для всех, кроме потока О.Г. Подлипской.

³Для всех, кроме потоков О.Г. Подлипской и Д.А. Терёшина.

⁴Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

дикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых*⁵.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.
9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат*⁶.
10. *Асимптотические направления. Диаметры линий второго порядка*⁷.
11. *Цилиндрические и конические поверхности*⁸. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус, их основные свойства. Прямолинейные образующие.
12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.
13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. *Понятие о группе преобразований*⁹.
14. Алгебраические операции с матрицами. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица.
15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Критерий обратимости. Правило Крамера. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии или линейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, <http://www.umnov.ru>.
3. *Чезлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. — Москва : Физматлит, 2004.

⁵Для потоков О.Г. Подлипской и И.А. Чубарова.

⁶Для потоков Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.

⁷Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

⁸Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

⁹Для всех, кроме потоков О.Г. Подлипской и Д.А. Терёшина.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемешева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. (цитируется С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: 15.2(6), 15.5(2, 9, 12).

Т.1. Пусть определены произведения AB и $A^T B^T$. Всегда ли определено произведение A^2 ?

С: 14.4(2, 4), 14.7(2, 3, 9), 17.1(2), 17.2(3).

II. Векторы. Замена базиса и системы координат

С: 1.2, 1.6, 1.11(2), 1.13, 1.21, 1.30(1), 1.37, 1.35*, 4.7, 4.16, 4.22, 4.27*.

Т.2. Найти координаты \vec{x} в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$:

$$\vec{x} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3,$$

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3.$$

III. Скалярное, векторное и смешанное произведение

С: 2.1(2, 3), 2.6(2), 2.12, 2.22, 2.26(2), 2.42*, 2.19, 2.32, 3.1(1, 2, 3), 3.2(1, 2), 3.6, 3.12, 3.13(2) 3.16, 3.19(3, 4), 3.28(2), 3.24*.

Т.3. Вектор m , перпендикулярный к оси Oz и к вектору $\vec{a} = (8; 15; 3)$, образует острый угол с осью Ox . Зная, что $|\vec{m}| = 51$ найти его координаты.

Т.4. Вычислить $\left[\left[\vec{a}\vec{b} \right] \vec{c} \right] - \left[\vec{a} \left[\vec{b}\vec{c} \right] \right]$.

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	15.2(<u>6</u>), 15.5(2, 9, <u>12</u>), Т.1, 14.4(2, 4), 14.7(2, <u>3</u> , 9), 17.1(<u>2</u>), 17.2(<u>3</u>).
2 неделя	1.2, <u>1.6</u> , 1.11(<u>2</u>), 1.13, <u>1.21</u> , 1.30(1), 1.37, 1.35*, Т.2.
3 неделя	<u>4.7</u> , 4.16, 4.22, 4.27*, 2.1(2, 3), 2.6(2), 2.12, 2.19, 2.32, <u>2.22</u> , 2.26(2), 2.42*.
4 неделя	3.1(1, <u>2</u> , 3), 3.2(<u>1</u> , 2), 3.6, 3.12, 3.13(<u>2</u>), 3.16, 3.19(<u>3</u> , 4), 3.28(2), 3.24*, Т.3, Т.4.

45 + 4*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

I. Прямая на плоскости

С: 5.2(1, 2), 5.8(1, 5), 5.9(3, 4), 5.16, 5.36, 5.54, 5.58, 6.2, 6.6, 6.18(2).

Т.1. Доказать, что уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ может быть записано в виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II. Прямая и плоскость в пространстве

С: 6.4, 6.9(1, 2), 6.10(2, 4), 6.11(3, 4, 8), 6.15, 6.26, 6.27(4)*, 6.54(4), 6.74(1).

III. Геометрические свойства линий второго порядка

С: 7.25(4), 7.31(1), 7.38(1), 7.39*, 7.49(1), 7.61(1), 8.1(2), 8.9(3), 8.25(1, 2), 8.28(3).

Т.2*. Доказать, что две параболы с общей осью и общим фокусом, расположенным между их вершинами, пересекаются под прямым углом.

IV. Канонический вид линий второго порядка

С: 9.1(4), 9.2, 9.4(4, 5, 6), 9.10(2)*, 9.19(2).

Т.3*. Определить: существует ли комбинация поворота и параллельного переноса, переводящая кривую $2x^2 + 12xy + 18y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ в кривую $4x^2 + 16xy + 16y^2 + 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 4 = 0$.

**Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям**

1 неделя	5.2(<u>1</u> , 2), 5.8(1, 5), 5.9(3, <u>4</u>), 5.16, 5.36, 5.54, 5.58, <u>6.2</u> , 6.6, 6.18(<u>2</u>), Т.1.
2 неделя	6.4, 6.9(<u>1</u> , 2), 6.10(2, <u>4</u>), 6.11(3, 4, 8), 6.15, 6.26, 6.27(4)*, 6.54(4), 6.74(1).
3 неделя	7.25(<u>4</u>), 7.31(1), 7.38(1), 7.39*, 7.49(1), 7.61(1), 8.1(<u>2</u>), 8.9(3), 8.25(<u>1</u> , 2), 8.28(3), Т.2*.
4 неделя	9.1(4), 9.2, 9.4(<u>4</u> , 5, 6), 9.10(2)*, 9.19(2), Т.3*.

43 + 4*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: 10.3(3, 12), 10.15, 10.30(1), 10.40, 10.38, 10.39, 10.65(2), 10.68, 10.83.

Т.1. Аффинные преобразования

С: 12.28(1, 3), 12.40(1), 12.53(1, 2, 8), 12.69(1, 7*), 12.82(7, 8*).

Т.2*. Представить матрицу аффинного преобразования A в виде комбинации $U\Sigma V^T$, где U, V — ортогональные, Σ — положительная, диагональная.

$$A : \begin{cases} x^* &= 14x + 18y \\ y^* &= -27x + y \end{cases} .$$

* V переводит пару ортогональных направлений в оси координат Σ — растяжение относительно осей, U — оси координат переходят в главные направления.

II. Определители n-ного порядка

С: 14.12, 14.21(7), 14.22(1), 14.23(12), 14.24(2, 7), 14.39*, 14.41.

III. Операции над матрицами, обратная матрица

С: 15.11(5, 7, 9*), 15.20(2)*, 15.24(1, 2), 15.22(3), 15.32, 15.37(1, 2, 3), 15.45(2, 5), 15.55*.

Т.3. Найти $\det(A^{n+3} - 3A^{n+2} + 3A^{n+1} - A^n)$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	10.3(<u>3</u> , 12), 10.15, 10.30(1), <u>10.40</u> , 10.38, 10.39, 10.65(2), 10.68, 10.83.
2 неделя	12.28(1, 3), 12.40(<u>1</u>), 12.53(1, 2, 8), 12.69(1, 7*), 12.82(7, <u>8*</u>), Т.1*.
3 неделя	14.12, 14.21(<u>7</u>), 14.22(1), 14.23(12), 14.24(2, <u>7</u>), 14.39*, <u>14.41</u> .
4 неделя	15.11(5, <u>7</u> , 9*), 15.20(2)*, 15.22(3), 15.24(<u>1</u> , 2), 15.32, 15.37(1, <u>2</u> , 3), 15.45(<u>2</u> , 5), 15.55*, Т.2.

35 + 4*

Составитель задания

ассистент М. Н.Герцев