Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 4
семестр: 7

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 7 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Вероятностное пространство.** Аксиоматика Колмогорова. Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Свойства вероятности.
2. **Условная вероятность.** Формулы полной вероятности и Байеса. Независимость. Независимые испытания. Лемма Бореля–Кантелли.
3. **Борелевские меры.** Теоремы о продолжении меры с алгебры и пи–системы на сигма–алгебру.
4. **Случайные величины.** Распределения вероятностей. Математическое ожидание и дисперсия. Независимость случайных величин.
5. **Совместное распределение.** Ковариация и коэффициент корреляции. Задача регрессии (в общей и линейной постановке). Условные математические ожидания.
6. **Законы больших чисел.** Неравенства Маркова, Чебышева, Колмогорова. Виды сходимости последовательностей случайных величин.
7. **Метод характеристических функций.** Определение и свойства характеристической функции. Теоремы обращения и сходимости. Закон больших чисел Хинчина. Центральная предельная теорема.
8. **Цепи Маркова.** Уравнения Колмогорова–Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
9. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона — Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией процесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.
10. **Броуновское движение.** Непрерывное случайное блуждание. Винеровский процесс и его свойства.
11. **Оценивание параметров.** Оценки математического ожидания и дисперсии по выборке. Свойства состоятельности и несмещенности оценок. Метод максимального правдоподобия. Интервальные оценки параметров (доверительные интервалы).

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
2. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
3. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
4. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.
5. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.

6. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
7. *Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г.* Задачи по теории вероятностей: основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. — Москва : КДУ, 2009.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 октября)

I. Вероятностное пространство. Свойства вероятности

Т.1. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

Т.2. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что $AX = AB$.

Т.3. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события. Покажите, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathsf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) = 1.$$

Т.4. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий и $\mathsf{P}(A_n) = 1$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажите, что

$$\mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Т.5. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — последовательность событий. Покажите, что

$$\mathsf{P}\left(\varliminf_{n\to\infty} A_n\right) \le \varliminf_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \le \varlimsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) \le \mathsf{P}\left(\varlimsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

Т.6. Покажите, что для любых двух событий A и B выполняется неравенство

$$|\mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)| \le \frac{1}{4}.$$

Т.7. Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

Т.8. Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

Т.9. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

T.10. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

T.11. У билетной кассы стоит очередь в 100 человек. Половина людей в очереди имеет 100–рублевые купюры, а вторая половина — 50–рублевые купюры. Изначально в кассе нет денег и стоимость билета — 50 рублей. Какова вероятность, что никому не придется ждать сдачу?

T.12. Расстояние от пункта A до пункта B автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту A и отправляется в B пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

T.13. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

T.14. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

T.15. На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

II. Условные вероятности. Формулы полной вероятности и Байеса. Независимость

T.16. Случайный эксперимент заключается в последовательном подбрасывании двух игральных костей. Найти вероятность того, что сумма в 5 очков появится раньше, чем сумма в 7 очков.

T.17. Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

T.18. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

T.19. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

T.20. Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

T.21. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

III. Случайные величины и распределения вероятностей

T.22. Пусть ξ и η — две случайные величины и $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти совместное распределение этих случайных величин.

T.23. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

T.24. В квадрат $\{(x_1,\, x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,\, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

T.25. Пусть ξ_k, $k = 1,\, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

Т.26. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

Т.27. Пусть ξ имеет имеет стандартное нормальное распределение. Найти функцию распределения и плотность случайной величины ξ^2.

Т.28. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью $f(x)$. Для каждого элементарного события $\omega \in \Omega$ вектор $(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ преобразуем в упорядоченный $(X_{(1)}(\omega), \ldots, X_{(n)}(\omega))$, где $X_{(1)}(\omega) \le \ldots \le X_{(n)}(\omega)$. Упорядоченный вектор $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ в математической статистике называют вариационным рядом, а случайные величины $X_{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$ — порядковыми статистиками. Покажите, что плотность совместного распределения порядковых статистик определяется равенством

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = n! f(x_1) \cdot \ldots \cdot f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_1 \le \ldots \le x_n\}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Т.29. Вдоль дороги, длиной в 1 км расположены случайным образом три человека. Найти вероятность того, что никакие два человека не находятся друг от друга на расстоянии, меньшем $1/4$ км.

IV. Математическое ожидание и дисперсия. Ковариация и коэффициент корреляции

Т.30. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

Т.31. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число появлений единицы, а η — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

Т.32. Подбрасывают две игральные кости. Пусть ξ_1 — число очков на первой игральной кости, а ξ_2 — на второй. Определим $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$. Найти $\mathsf{cov}(\eta_1, \eta_2)$ и выяснить, являются ли η_1 и η_2 независимыми.

Т.33. Доказать, что если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая, то из некоррелируемости следует их независимость.

Т.34. Авария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y, которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найдите математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Неравенства Чебышева и Маркова. Законы больших чисел

Т.1. Известно, что число посетителей некоторого салона в день является случайной величиной со средним значением 50.

(a) Оценить вероятность того, что число посетителей в конкретный день превысит 75.

(b) При условии, что дисперсия числа посетителей в день равна 25, оценить вероятность того, что в конкретный день их число будет между 40 и 60.

Т.2. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что при 1000 бросаниях монеты число выпадений герба окажется в промежутке [450,550].

Т.3. Вероятность того, что изделие качественное, равна 0,9. Каков должен быть объем партии изделий, чтобы с вероятностью $\geq 0,95$ можно было утверждать, что отклонение (по абсолютной величине) доли качественных изделий от 0,9 не превысит 0,01?

Т.4. (Одностороннее неравенство Чебышева.) Пусть случайная величина ξ имеет нулевое среднее и дисперсию σ^2. Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mathsf{P}(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$

Т.5. (Неравенство Иенсена.) Пусть $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\varphi''(x) \geq 0$ для всех $x \in (a, b)$ (т. е. φ — выпуклая функция, и допускается $a = -\infty$ и $b = \infty$). Допустим также, что ξ — случайная величина, которая принимает значения из (a, b) и $\mathsf{E}\xi = m$, $\mathsf{E}\varphi(\xi)$ конечны. Показать, что тогда

$$\mathsf{E}\varphi(\xi) \geq \varphi(\mathsf{E}\xi) = \varphi(m).$$

Т.6. Пусть ξ — случайная величина, имеющая нормальное распределение с параметрами (a, σ^2). Показать, что для $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\mathsf{P}(|\xi - a| \geq \varepsilon\sigma) \leq \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\varepsilon^2/2}.$$

Указание. Используйте неравенство

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \leq \frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon^2/2}, \qquad \varepsilon > 0,$$

которое можно получить с помощью формулы интегрирования по частям.

Интересно сравнить этот результат при $\varepsilon = 3$ с "правилом 3-х сигм".

Т.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин такая, что $\mathsf{E}\xi_k = a$, $\mathsf{D}\xi_k = \sigma^2$ и $\mathsf{cov}(\xi_i, \xi_j) = (-1)^{i-j}v$, $i \neq j$. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Т.8. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин с конечными математическими ожиданиями и $\xi_n \overset{\text{п.н.}}{\to} \xi$, $\mathsf{E}\xi < \infty$, $\mathsf{E}\xi_n \to \mathsf{E}\xi$ при $n \to \infty$. Покажите, что тогда $\mathsf{E}|\xi_n - \xi| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\xi_n \overset{L_1}{\to} \xi$.

II. Метод характеристических функций. Центральная предельная теорема

Т.9. Найти характеристическую функцию распределения Лапласа, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

Т.10. Найти характеристическую функцию нормального распределения с параметрами (a, σ^2).

Т.11. Найти распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$h_1(t) = \cos t; \qquad h_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \qquad h_3(t) = \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

Т.12. Найти распределение, которому соответствует характеристическая функция $h(t) = e^{-t^2} \cos t$.

Т.13. Является ли функция $h(t) = \cos t^2$ характеристической?

Т.14. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right).$$

Т.15. Используя результат предыдущей задачи, найти предел

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=n}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Т.16. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

III. Элементы теории случайных процессов и математической статистики

Т.17. Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-ой подгруппе было 20% населения, во 2-ой подгруппе — 30%, и в 3-ей подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Т.18. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за n шагов и предельные вероятности.

T.19. Производящая функция процесса Гальтона–Ватсона имеет вид

$$f(z) = \frac{1}{m+1-mz}, \qquad m > 0.$$

Выяснить при каких значениях параметра m процесс является: докритическим, критическим, надкритическим. Найти вероятность вырождения процесса в надкритическом случае. Показать, что n-тая итерация производящей функции может быть представлена в виде

$$f^n(z) = \frac{m^n - 1 - m(m^{n-1}-1)z}{m^{n+1} - 1 - m(m^n - 1)z}$$

при $m \neq 1$ и

$$f^n(z) = \frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}$$

при $m = 1$.

T.20. Пусть $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Для $u \in \mathbb{R}$ определяется

$$\tau_u = \inf\{t\colon\, W_t = u\}$$

— момент первого достижения уровня u траекторией винеровского процесса. Найти плотность распределения случайной величины τ_u.

T.21. Пусть

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s, \qquad t > 0,$$

где $(W_t,\, t \geq 0)$ — винеровский процесс. Найти плотность распределения случайной величины M_t.

T.22. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из пуассоновского распределения с параметром λ. Найти оценку наибольшего правдоподобия параметра λ.

T.23. Пусть $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ — выборка из нормального распределения $\mathscr{N}(a, \sigma^2)$. Найти оценки наибольшего правдоподобия параметров a и σ^2.

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Подписано в печать 30 июня 2020 г. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,5. Тираж 120 экз. Заказ № 88.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru