Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Стохастические процессы**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 4
семестр: 7

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 7 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Примеры случайных процессов, основанные на последовательностях независимых случайных величин (случайные блуждания, ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга).
2. Случайные процессы как семейства измеримых отображений. Траектории (реализации, выборочные функции). Процессы с дискретным и непрерывным временем. Конечномерные распределения. Понятие эквивалентности случайных процессов.
3. Теорема Колмогорова о построении случайного процесса по заданному семейству согласованных вероятностных мер. Формулировка этой теоремы на языке характеристических функций.
4. Процессы с независимыми приращениями. Существование таких процессов в терминах характеристических функций приращений.
5. Пуассоновский процесс, его свойства. Явная конструкция по последовательности независимых экспоненциальных случайных величин.
6. Многомерное нормальное распределение, его свойства. Гауссовские процессы. Построение согласованных распределений по функции среднего и ковариационной функции.
7. Броуновское движение (винеровский процесс), его свойства. Доказательство эквивалентности двух определений (как гауссовского процесса и процесса с независимыми приращениями).
8. Построение броуновского движения по функциям Шаудера.
9. Теорема Пэли–Винера–Зигмунда о недифференцируемости траекторий броуновского движения.
10. Аппарат условных математических ожиданий. Наилучший прогноз в среднем квадратическом.
11. Марковские процессы, эквивалентные определения. Марковость процесса с независимыми приращениями. Цепи Маркова с непрерывным временем.
12. Эквивалентность двух определений пуассоновского процесса (как процесса с независимыми приращениями и марковской цепи).
13. Эргодическая теорема.

14*. Понятие о системах массового обслуживания. Формулы Эрланга.

15. Мартингалы (субмартингалы), примеры. Моменты остановки.
16. Задача о разорении игрока.

17*. Неравенство Крамера–Лундберга.

18. Процессы, стационарные в широком и узком смыслах. Понятие о спектральном представлении случайных процессов.

19. Построение интеграла Ито.
20.* Свойства интеграла Ито. Формула Ито.
21.* Понятие о стохастическом дифференциальном уравнении и его решениях.

*Знаком * отмечен необязательный материал.*

Литература

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Эдиториал УРСС, 1999.
2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Булинский А. В.* Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. — Москва : МФТИ, 2010.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1991.
5. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
6. *Севастьянов В. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — Москва -Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
7. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Москва : Изд-во МГУ, 1992.
8. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — Москва : Мир, 1984.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–26 октября)

I. Примеры процессов, конечномерные распределения, распределения в пространстве траекторий

1. Как выглядят траектории процесса $X = \{X(t) = e^{\xi t},\ t \in [0, 2\pi]\}$, если величина ξ принимает значения -1 и 1 с равными вероятностями? Найти двумерные распределения процесса.

2. Пусть $X = \{X(t) = \xi \cdot t + c,\ t \geq 0\}$, где случайная величина $\xi \sim N(0, 1)$, $c = \mathrm{const}$. Найти конечномерные распределения процесса X.

3. Пусть распределение числа потомков каждой частицы таково:

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{1}{4}.$$

Будет ли меньше $1/2$ вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона?

4. Дать пример процессов $X = \{X(t), t \in T\}$ и $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$, а также множества C в пространстве траекторий, для которых $\{X \in C\} \in \mathcal{F}$, $\{Y \in C\} \notin \mathcal{F}$.

5. Верно ли, что если у процессов $X = \{X(t),\ t \in T\}$ и $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ совпадают конечномерные распределения, то процесс Y является модификацией процесса X?

6. Пусть $X = \{X(t) = V + 2t,\ t \geq 0\}$, где V имеет распределение Коши. Найти $\mathrm{P}\,(X(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in (1, 3])$.

7. Введем процесс $X = \{X(t) = (\xi_1 + \ldots + \xi_k)t,\ t \geq 0\}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые $N(0, 1)$ величины. Найти конечномерные распределения процесса X и его ковариационную функцию.

II. Процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы

8. Пусть $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями, $h = h(t)$ $(t \geq 0)$ — детерминированная функция. Верно ли, что процессы $\{X(t) + h(t)\}$ и $\{h(t)X(t),\ t \geq 0\}$ имеют независимые приращения?

9. Пусть $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Доказать, что $\frac{N(t)}{t} \to \lambda$ п.н. при $t \to \infty$.

10. Пусть $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а $0 < t_1(\omega) < t_2(\omega) < \ldots$ – точки его скачков и $t_0(\omega) = 0$. Положим $X(t, \omega) = 1$ для $t \in [t_{2k}, t_{2k+1})$, где $k = 0,\ 1,\ \ldots$ В остальных случаях пусть $X(t, \omega) = -1$. Найти ковариационную функцию процесса X.

11. Найти ковариационную функцию процесса $\{N(t)^2,\ t \geq 0\}$ – квадрата пуассоновского процесса N интенсивности λ.

12. Пусть $(\xi)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин, не зависящая от пуассоновского процесса N интенсивности λ. Доказать, что процесс $Y(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ является процессом с независимыми приращениями.

13. Доказать, что процесс $X = \left\{\frac{1}{\sqrt{c}} W(ct),\ t \geq 0\right\}$, где W — винеровский процесс и константа $c > 0$, также является винеровским.

14. Показать, что процесс $X = \{X(t) = W(t + a) - W(a),\ t \geq 0\}$, где W — винеровский процесс и константа $a > 0$, является винеровским.

15. Найти ковариационую функцию броуновского моста, т.е. процесса $W_0 = \{W_0(t) := W(t) - tW(1),\ t \in [0, 1]\}$, где W — винеровский процесс.

16. Пусть $X(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, где $t \geq 0$ — векторный процесс, составленный из независимых винеровских процессов. Доказать, что с вероятностью единица процесс X выйдет из шара произвольного радиуса $R > 0$.

17. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|W\left(\frac{k}{n}t\right)-W\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right|^2 \to t$ в среднем квадратичном при $n\to\infty$. Здесь W — винеровский процесс, а $t=\mathrm{const}>0$. Вывести отсюда, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|W\left(\frac{k}{n}t\right)-W\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right| \to \infty$ по вероятности при $n\to\infty$.

III. Марковские моменты, мартингалы

18. Пусть $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots$ — а) марковские моменты, б) моменты остановки. Будут ли таковыми $\min\limits_{k=1,\ldots,n}\tau_k$, $\max\limits_{k=1,\ldots,n}\tau_k$, $\inf_{k\in\mathbb{N}}\tau_k$, $\sup_{k\in\mathbb{N}}\tau_k$?

19. Пусть $X_1,\ X_2,\ \ldots$ — последовательность случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$, B — борелевское множество в $\mathbb{R}^m$. Показать, что $\tau=\inf\{n: X_n\in B\}$ является марковским моментом относительно естественной фильтрации этой последовательности. Найти распределение величины X_τ, когда $(X_n)_{n\geq 1}$ состоит из независимых одинаково распределенных векторов.

20. Пусть $X=\{X(t), t\geq 0\}$ является L^1-процессом, т.е. все $\mathrm{E}|X(t)|<\infty$. Вычислить у.м.о.

$$\mathrm{E}(X(s)|X(t)),$$

если а) $s>t\geq 0$ и б) $0\leq s<t$ в случаях 1) X — пуассоновский процесс N постоянной интенсивности и 2) X — винеровский процесс W.

21. Показать, что процесс $\{W(t)^2-t,\ t\geq 0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

22. Найти все $a,\ b\in\mathbb{R}$ такие, что процесс

$$X=\{X(t):=\exp(aW(t)+bt),\quad t\geq 0\}$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

23*. Пусть $X=(X_n)_{n\geq 0}$ — мартингал. Привести примеры моментов остановки τ и σ таких, что $\mathrm{E}X_\tau=\mathrm{E}X_0$, $\mathrm{E}X_\sigma\neq\mathrm{E}X_0$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Марковские процессы

1. Привести примеры марковского и немарковского процессов.

2. Пусть $(\xi)_{n\geq 0}$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$, $h_n : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — детерминированные борелевские функции ($n \geq 1$) и X_0 — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$. Положим $X_n = h_n(X_{n-1}, \xi_n)$, $n \geq 1$. Показать, что $(X_n)_{n\geq 0}$ — процесс Маркова.

3. Пусть величины $X_1, \ldots, X_N$ образуют цепь Маркова. Показать, что $(Y_k)_{0\leq k\leq N-1}$ — цепь Маркова, где $Y_k = X_{N-k}$, $k = 1, \ldots, N$.

4. Пусть $X = \{X(t),\, t \geq 0\}$ — марковский процесс. Будет ли марковским процесс $Y = \{Y(n) = X(n),\, n = 0,\, 1,\, \ldots\}$.

5. Пусть $Y = \{Y(n),\, n = 0,\, 1,\, \ldots\}$ — марковский процесс. Будет ли марковским процесс $X = \{X(t) = Y([t]),\, t \geq 0\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа?

6. Пусть дана марковская цепь X_n, $n \geq 0$, имеющая матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где $0 < \alpha < 1$. Найти стационарное распределение.

7. Найти матрицу переходных вероятностей пуассоновского процесса N (отправляясь от определения N как процесса с независимыми приращениями).

8. Привести пример марковского процесса, не являющегося мартингалом. Привести пример марковского процесса, являющегося мартингалом.

9*. Привести пример мартингала, не являющегося марковским процессом.

II. Стационарные процессы

10. Привести пример процесса, стационарного в широком смысле, но нестационарного в узком смысле. Привести пример процесса, стационарного в узком смысле, но нестационарного в широком смысле.

11. Объяснить, почему для гауссовских процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают.

12. Показать, что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его ковариационная функция непрерывна в нуле.

13. Пусть $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность, состоящая из независимых случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2. Найти спектральную плотность этой последовательности.

14. Пусть $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ — стационарный в широком смысле процесс со средним a и ковариационной функцией $R = R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \to a$ в среднем квадратическом при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} R(n) \to 0$, $n \to \infty$.

15. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t}),\ t \in \mathbb{R}\}$, где W — винеровский процесс, константа $\alpha > 0$. Доказать, что X — стационарный гауссовский процесс и найти его спектральную плотность.

III. Элементы стохастического анализа

16*. Пусть $f(t)$ — непрерывная детерминированная функция на $[0, \infty)$. Доказать, что $X = \{X(t) = \int\limits_0^t f(u)dW(u),\ t \geq 0\}$ — гауссовский процесс (W — винеровский процесс).

17*. Вычислить интеграл Ито $\int\limits_0^T W(t)\,dW(t)$, где W — винеровский процесс.

18*. Решить стохастическое дифференциальное уравнение $dX(t) = aX(t) + bX(t)\,dW(t)$, где $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс, a, b — константы, а $X(0) = X_0$.

Составитель задания к.ф.-м.н., доцент А. В. Булинский

Подписано в печать 30 июня 2020 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 0,5. Тираж 60 экз. Заказ № 88.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru