УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 75 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин
к. ф.-м. н., доцент А. А. Хасанов
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.
2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, голоморфной в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства.
4. Интегрирование по комплексному переменному, свойства интеграла.
5. Лемма Гурса. Интегральная теорема Коши для голоморфной функции. Интегральная формула Коши. Интеграл Коши, его дифференцируемость.
6. Степенные ряды, первая теорема Абеля, радиус и круг сходимости. Разложение в степенной ряд функции, голоморфной в круге. Теоремы Вейерштрасса для равномерно сходящихся рядов из голоморфных функций. Теорема единственности для голоморфных функций.
7. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, голоморфной в кольце, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
8. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Определение характера особой точки по структуре главной части ряда Лорана. Теоремы Сохоцкого–Вейерштрасса и Пикара (последняя без доказательства).
9. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
10. Первообразная функции и полный дифференциал, их связь с интегралом, независящем от формы кривой. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Морера.
11. Теорема об обратной функции. Понятие многозначной функции и её регулярных ветвях. Функция $\mathrm{Ln} z$.
12. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура и его свойства. Критерий выделения регулярных ветвей многозначных функций $\mathrm{Ln} f(z)$ и $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.
13. Целые функции. Теорема Лиувилля для целых функций Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
14. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных добей. Формула для $ctgz$.

15. Понятие об аналитическом продолжении элементов друг в друга с помощью конечной цепочки кругов и вдоль контура, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие об аналитической функции. Теорема о монодромии (без доказательства).
16. Особые точки аналитических функций, точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
17. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и многолистность в малом. Принцип максимума модуля голоморфной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Лемма Шварца.
18. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной области.
19. Дробно-линейные функции и их свойства.
20. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства.
21. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Принцип соответствия границ (без доказательства).
22. Теорема о стирании разреза. Принцип симметрии при конформных отображениях.
23. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга. Существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

Дополнительная

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Москва : Наука, 1973, 1987; Санкт Петербург : Лань, 2002.
4. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Комплексные числа

§1: 1(2, $\underline{4}$); 3(4); 5($\underline{4}$); 6; 9($\underline{3}$); 10(5); $\underline{11}$; 13; 18.

$\underline{\textbf{T.1}}$. Когда четыре точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на окружности?

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: 11(1, $\underline{4}$); 12($\underline{1}$, 2); 13($\underline{1}$, 2); 17($\underline{3}$, 5, 8).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: 1(2, $\underline{4}$, 6); 17($\underline{3}$, 6).

T.2. Найти области в которых функция

$$f(z) = 2|xy| + i(x^2 - y^2), \quad z = x + iy,$$

является голоморфной.

IV. Ряд Тейлора

§7: $\underline{5}$; 11(2, $\underline{3}$).

V. Теорема единственности

§9: 2($\underline{5}$, 6); 13($\underline{5}$).

T.3. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ голоморфна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

VI. Ряд Лорана

§11: 4($\underline{6}$); 5(4); 7(3); 8($\underline{6}$); 9(2); 10($\underline{6}$).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: 8($\underline{3}$, 7); 15(4, $\underline{8}$); 17(9); 20(5).

T.4. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{\sin \frac{3\pi z}{2}}{(\cos 2\pi z - \cos \pi z)(\cos \frac{4\pi^2}{z} - 1)} e^{\frac{1}{\sin \pi z}}.$$

T.5*. Пусть голоморфная в кольце $G = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A > 0, B > 0$ и $\alpha \in [0,1]$, при которых справедливо неравенства

$$\frac{A}{|z|^\alpha} \leq |f(z)| \leq \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall\, z \in G.$$

Определить тип особой точки 0 для функции f при различных α.

47[1* (20)]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 2(13); 4(5); 5(3).

§14: 2(6, 8, 18, 22); 3(1).

§23: 1(4, 8); 2(13, 20).

T.1. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3ix + 4}\, dx.$$

T.2. Применяя теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{dz}{z^2 |z-i|^4}$$

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 4; 5; 7*.

§17: 3; 4.

§18: 9(2, 3) 24; 25; 35; 36; 38*; 44*.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 8; 10; 24; 25*; 37; 42*.

§23: 5(2, 4, 8); 6(6, 7, 8).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(1, 3, 7, 8*).

<u>Т.3</u>. Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

44[6* (16)]

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Конформные отображения

§27: 7(2); 8(<u>2</u>, 4).

§28: 5(рис. <u>28.31</u>, 28.34, <u>28.37</u>, 28.43); 7; 10(рис. <u>28.49</u>, 28.53, <u>28.61</u>); 11(рис. 28.65); <u>13</u>; 19(рис. 28.71, <u>28.74</u>, 28.80, <u>28.84</u>, 28.85); 20(рис. 28.89).

II. Принцип симметрии

§29: 3(рис. 29.19, <u>29.22</u>); 4*; 5; 6* (рис. 29.30).

III. Задача Дирихле

Т.1. Решить классическую задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0, \quad |z| < 1; \quad u|_{|z|=1} = \frac{\sin\varphi}{5 + 4\cos\varphi}.$$

25[2* (9)]

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент А. А. Хасанов