УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные типы уравнений**

   Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами. Приведение к каноническому виду. Классификация уравнений. Уравнения Лапласа, Пуассона, волновое уравнение, уравнение теплопроводности и другие.

   Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка, линейные относительно старших производных. Классификация уравнений в точке. Характеристические поверхности.

   Замена независимых переменных и приведение к каноническому виду уравнения с двумя независимыми переменными. Классификация в точке и в области. Характеристики.

   Постановка задач математической физики. Типичные задачи. Краевые и начальные условия. Задачи: Коши; краевые; смешанные.

2. **Уравнения гиперболического типа**

   Задача Коши для уравнения колебаний струны ($n = 1$). Формула Даламбера. Область зависимости. Смешанные задачи для полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных данных.

   Задача Коши для волнового уравнения ($n = 3$). Формула Кирхгофа.

   Задача Коши для уравнения колебаний мембраны ($n = 2$). Формула Пуассона (метод спуска).

   Единственность решения задачи Коши.

   Задача Коши на плоскости для линейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа.

   Задача с данными на характеристиках (задача Гурса).

3. **Уравнения параболического типа**

   Уравнение теплопроводности. Фундаментальное решение и его свойства.

   Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

   Принцип максимума. Теорема единственности.

   Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности на полупрямой.

4. **Уравнения эллиптического типа**

   Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их свойства.

   Теорема о среднем. Принцип максимума. Преобразование Кельвина.

   Лапласиан в полярных, цилиндрических и сферических координатах.

   Фундаментальные решения ($n = 3$, $n = 2$) и дельта-функция.

   Основные краевые задачи (внутренние, внешние): задача Дирихле, задача Неймана. Теоремы единственности.

   Формулы Грина. Функция Грина задачи Дирихле. Представление решения задачи Дирихле (в круге и в шаре, в полуплоскости и в полупространстве) через краевые значения.

Конформные отображения и их использование для решения задачи Дирихле и для построения соответствующей функции Грина.
Метод разделения переменных и решение краевых задач в $\mathbb{R}^2$.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Годунов С. К* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 1971.
3. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
4. *Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
6. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.

Дополнительная

7. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — Москва : Высшая школа, 1976.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва : Мир, 1964.
9. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1966.
10. *Трикоми Ф.* Лекции об уравнениях в частных производных. — Москва : ИИЛ, 1957.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — Москва : ИИЛ, 1960.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2004, 4-е изд., стереотип.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–26 октября)

2.1($\underline{9}$); 2.2(1,$\underline{4}$); 2.11(2,5); 14.26($\underline{1}$,2).

1. Решите задачи Коши:

а) $u_t = xu_x + x^2u, \quad u(x,0) = \sin x;$

$\underline{\text{б}}$) $u_t = (8x-6y)u_x + (9x-7y)u_y, \quad u(x,y,0) = \alpha(x,y).$

2. Найдите общее решение уравнения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - 5\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + 4\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

12.13(1).

3. Решите задачу Коши и укажите наибольшую область, в которой решение определено и однозначно:

$2x^2 u_{xx} - 3xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + 2x u_x + y u_y = 0,$
$u|_{y=1} = x^3 - x, \quad u_y\big|_{y=1} = 3x^3 - 2x, \quad 1 < x < 2.$

14.33; 14.37; 14.41.

4. Решите задачу и укажите наибольшую область, в которой решение определено и однозначно:

$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y\big|_{y=0} = 0$ при $-2 < x \leq 0,$

$u|_{y=x} = 5x^2 + 3x^3$ при $0 \leq x < 1.$

12.27; 12.28; 12.30; 12.36(1); 12.37(5); 12.38(3).

5. Решите задачу Коши для волнового уравнения:

$u_{tt} = a^2 \Delta u + g(t) f(x), \quad x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t\big|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$
если $f(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ являются собственными функциями оператора Лапласа: $\Delta f = \lambda f$, $\Delta u_0 = \mu_0 u_0$, $\Delta u_1 = \mu_1 u_1$, $x \in \mathbb{R}^n$,
λ, μ_0, μ_1 — постоянные.

21.1; 21.2; 21.4; 21.21.

6. Решите задачу Коши для волнового уравнения:

$u_{tt} = 2\Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = e^{-(x^2+y^2+z^2)}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$

Указание. Решение следует искать в виде

$$u(x, y, z, t) = \frac{v(r, t)}{r}, \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

7. Приведите к каноническому виду гиперболическую систему:

$$\begin{cases} u_t - v_x = 0, \\ v_t - u_x = 0. \end{cases}$$

Найдите общее решение системы.

8. Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} u_t + 4u_x - 6v_x = 0, \\ v_t + 3u_x - 5v_x = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

и решите задачу Коши с начальными условиями: $u(x,0) = \sin x$, $v(x,0) = \cos x$.

9. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = -9u_x + 16v_x, \\ v_t = -9u_x + 15v_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$u(x,0) = \cos x, \quad v(x,0) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$

10. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 4u_x - 2v_x - 9w_x, \\ v_t = -3u_x + 5v_x + 15w_x, \\ w_t = 2u_x - 2v_x - 7w_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$u(x,0) = \sin x, \quad v(x,0) = 0, \quad w(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$

11. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t = 8u_x - 18v_x, \\ v_t = 3u_x - 7v_x, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$u(x,0) = \theta(x), \quad v(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$. Изобразите на плоскости (x,t) линии разрыва функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Вычислите значения функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ между этими линиями.

12*. Найдите общее решение системы:

$$\begin{cases} u_t = 3u_x - 4v_x - 2v_y, \\ v_t = 2u_x - 3v_x + u_y - 3v_y, \end{cases} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$$

и решите задачу Коши с начальными условиями: $u(x,y,0) = \theta(x+y)$, $v(x,y,0) = \theta(x-y)$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

13.1; 13.2; 13.4; 13.5(3); 13.6(2); 13.7(2,5); 13.8(1,3,5).
21.30; 21.33.

1. Решите задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t + 5u_{xx} - 9v_{xx} = 0, \\ v_t + 6u_{xx} - 10v_{xx} = 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$
$$u(x,0) = e^x,\ v(x,0) = \cos 2x.$$

2. Решите задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + 2tu_{xy} + t^2u_{yy},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,\ u(x,y,0) = \sin^2(x+y).$$

3. Решите задачу Коши:

$$u_t = u_{xx} + xu_x,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u(x,0) = \exp(-x^2/2).$$

4. Постройте фундаментальные решения уравнений:

а) $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ с сингулярностью в точке (a,b);
б) $3u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{yz} + u_{zz} = 0$ с сингулярностью в точке (a,b,c).

17.1(2,3); 17.2(2); 17.11(2,3,6).
16.1(2); 16.2(1); 16.3(2).

5. Найдите гармоническую при $r < 2$ функцию $u(x,y)$, совпадающую с функцией x^3y при $r = 2$.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный