УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
Р. В. Константинов, к. ф.-м. н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Область определения линейного оператора. Плотно определённые операторы. Симметричные операторы, свойства их собственных значений и собственных функций.
2. Сопряжённое гильбертово пространство, теоремы Рисса о проекции и об ортогональном дополнении, теорема Рисса–Фреше.
3. Сопряжённый оператор для линейного оператора в гильбертовом пространстве, его область определения. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого.
4. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого. Замкнутость сопряжённого оператора.
5. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Замыкаемость плотно определённого симметричного оператора. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора.
6. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряжённого замкнутого плотно определённого симметричного оператора.
7. Критерий самосопряжённости замыкания плотно определённого симметричного оператора. Самосопряжённость замыкания симметричного оператора, обладающего ортогональным базисом из собственных функций. Спектральное разложение и функциональное исчисление таких операторов.
8. Тензорное произведение двух гильбертовых пространств и построение в нём ортогонального базиса с помощью ортогональных базисов в сомножителях.
9. Оператор Лапласа в прямоугольнике $\varPi$ с однородными граничными условиями Дирихле или Неймана как симметричный плотно определённый оператор в $\mathbb{L}_2(\varPi)$. Ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(\varPi)$ из его собственных функций, спектральное разложение замыкания этого оператора.
10. Начально-краевая задача в гильбертовом пространстве с замкнутым симметричным линейным оператором, обладающим ортогональным базисом из собственных функций, метод Фурье её решения.
11. Начально-краевая задача для уравнений Шрёдингера, теплопроводности и волнового, условия их разрешимости, оператор эволюции.
12. Формулы Грина для оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$ в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей, замыкаемость этого оператора.

13. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей. Задачи Дирихле и Неймана для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$, обсуждение единственности их решения.
14. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность её решения.
15. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.
16. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность её решения.
17. Спектр линейного оператора в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности вещественного числа спектру самосопряжённого оператора.
18. Компактные самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта–Шмидта. Резольвента компактного самосопряжённого оператора.
19. Интегральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ для компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Компактность интегрального оператора. Интегральный самосопряжённый оператор в $\mathbb{L}_2(K)$, ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(K)$ из его собственных функций.
20. Симметричный оператор Штурма–Лиувилля и критерий его обратимости. Самосопряжённость и компактность оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова.
21. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе или круге при однородных граничных условиях. Функции Бесселя и свойство их ортогональности. Свойства нулей функций Бесселя.
22. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе или круге $K \subset \mathbb{R}^2$ при однородных граничных условиях.
23. Метод Фурье решения задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2008.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, Том 1. — Москва : Мир, 1977.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики, Том 1. — Москва : Мир, 1982.
4. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией В. С. Владимирова. — 3-е изд., исправл. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Дополнительная

5. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
6. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва :Физматлит, 2001.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 20–26 октября)

I. Симметричные и самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве

1.1. Для линейного оператора $A\colon \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида

$$(Af)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1+|x|}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R}) \cap \mathbb{L}_2(\mathbb{R}),$$

вычислить операторы

$$A^*\colon D(A^*) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad A^{**}\colon D(A^{**}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R}).$$

1.2. Для линейного оператора $A = i\frac{d}{dx}\colon D(A) \to \mathbb{L}_2[0,1]$ с областью определения $D(A) \subset \mathbb{L}_2[0,1]$ найти операторы

$$A^*\colon D(A^*) \to \mathbb{L}_2[0,1] \quad \text{и} \quad A^{**}\colon D(A^{**}) \to \mathbb{L}_2[0,1], \quad \text{если}$$

а) $D(A) = \left\{\, f \in W^{1,2}[0,1] \ : \ f(0) = f(1) = 0 \,\right\}$;
б) $D(A) = \left\{\, f \in W^{1,2}[0,1] \ : \ f(0) = f(1) \,\right\}$;
в) $D(A) = \left\{\, f \in W^{1,2}[0,1] \ : \ f(0) = 0 \,\right\}$;
г) $D(A) = W^{1,2}[0,1]$.

1.3. Доказать, что оператор $\hat{x}\colon D(\hat{x}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$, где

$$D(\hat{x}) = \left\{\, f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \ : \ xf(x) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \,\right\},$$

$$(\hat{x}f)(x) = xf(x) \quad \forall\, f \in \mathcal{D}(\hat{x}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

является самосопряжённым.

1.4. Доказать, что оператор $\hat{p} = -i\frac{d}{dx}\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ является самосопряжённым.

1.5. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ самосопряжённый линейный оператор $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$ обладает ортогональным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$ из собственных векторов:

$$Ae_n = \lambda_n e_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \text{где } \lambda_n \text{ — собственное число } e_n.$$

Доказать, что

$$D(A) = \left\{ f \in \mathcal{H} \;:\; \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \frac{|(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} < +\infty; \right\},$$

и имеет место спектральное разложение A вида

$$Af = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)} e_n \qquad \forall\, f \in D(A).$$

1.6. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ симметричный линейный оператор $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$ обладает ортогональным базисом в $\mathcal{H}$ из собственных векторов. Доказать, что замыкание оператора A является самосопряжённым оператором, для которого найти область определения и спектральное разложение.

1.7. Доказать, что линейный оператор $A = \frac{d^2}{dx^2}\colon D(A) \to \mathbb{L}_2[0,1]$ с областью определения

$$D(A) = \{\; f \in W^{2,2}[0,1] \;:\; f'(0) = f'(1) = 0 \;\}$$

является самосопряжённым. Найти в $\mathbb{L}_2[0,1]$ ортогональный базис из собственных векторов A и выписать его спектральное разложение.

1.8. Доказать, что линейный оператор $A = \frac{d^2}{dx^2}\colon D(A) \to \mathbb{L}_2[0,1]$ с областью определения

$$D(A) = \{\; f \in W^{2,2}[0,1] \;:\; f(0) = f'(1) = 0 \;\}$$

является самосопряжённым. Найти в $\mathbb{L}_2[0,1]$ ортогональный базис из собственных векторов A и выписать его спектральное разложение.

1.9. Пусть прямоугольник $\Pi = [0,1] \times [0,1]$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\Pi)$ рассматривается линейный оператор

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \colon D(A) \to \mathcal{H}$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \quad \begin{array}{ll} f'_y(x,0) = f(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ f(0,y) = f'_x(1,y) = 0, & y \in [0,1] \end{array} \right\},$$

Доказать, что A — симметричный оператор, найти ортогональный базис в $\mathcal{H}$ из собственных векторов A, найти область определения и спектральное разложение замыкания оператора A.

1.10. Пусть прямоугольник $\Pi = [0,1] \times [0,1]$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\Pi)$ рассматривается линейный оператор

$$A = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\frac{\partial}{\partial y} \colon D(A) \to \mathcal{H}$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \quad \begin{array}{rl} f(x,0) = if(x,1), & x \in [0,1], \\ f'_x(0,y) = f(1,y) = 0, & y \in [0,1] \end{array} \right\},$$

Доказать, что A — симметричный оператор, найти ортогональный базис в $\mathcal{H}$ из собственных векторов A, найти область определения и спектральное разложение замыкания оператора A.

II. Начально-краевая задача в гильбертовом пространстве, метод Фурье

1.11. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Задан самосопряжённый линейный оператор $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$, обладающий ортогональным базисом $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$ из собственных векторов:

$$Ae_n = \lambda_n e_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \text{где } \lambda_n \text{ — собственное число вектора } e_n.$$

Известно, что последовательность собственных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена. Решить следующие задачи:

а) Для любого $v \in D(A)$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(A)$

$$\begin{aligned} i\tfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t), \qquad t > 0, \\ u(+0) &= v; \end{aligned}$$

б) Для любого $v \in \mathcal{H}$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(|A|)$

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) &= -|A|u(t), \qquad t>0,\\ u(+0) &= v; \end{aligned}$$

в) Для любого $v \in D(A^2)$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(A^2)$

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) &= -A^2u(t), \qquad t>0,\\ u(+0) &= v,\\ \tfrac{d}{dt}u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

г) Для любого $v \in D(A)$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(A^2)$

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) &= -A^2u(t), \qquad t>0,\\ u(+0) &= 0,\\ \tfrac{d}{dt}u(+0) &= v; \end{aligned}$$

д) Для любого $v \in \mathcal{H}$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(|A|)$

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) &= -|A|u(t) + v\sin(t), \qquad t>0,\\ u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

е) Для любого $v \in \mathcal{H}$ найти $u\colon (0,+\infty) \to D(A)$

$$\begin{aligned} i\tfrac{d}{dt}u(t) &= Au(t) + v\exp(-t), \qquad t>0,\\ u(+0) &= 0. \end{aligned}$$

III. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в круге и кольце

1.12. Пусть $K = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ r = \sqrt{x^2+y^2} < 1 \Big\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = x^4.$$

б) Найти решение $u \in C^2(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = y^3.$$

в) Найти решение $u \in C^2(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = -xy, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = 0.$$

г) Исследовать, при каких $a \in \mathbb{R}$ существует решение $u \in C^2(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = x^2, \quad (x,y) \in K, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = ax^2 + y^2,$$

и найти это решение.

1.13. Пусть $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 1 < r = \sqrt{x^2+y^2} < 2 \right\}$. Найти решение $u \in C^2(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = 1 + x^2, \quad u|_{r=2} = y^2.$$

1.14. Пусть полукруг $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 < 1, \;\; y > 0 \right\}$ с границей $\partial K = \gamma_0 \cup \gamma_c$, где:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le x \le 1, \;\; y = 0 \right\}, \\ \gamma_c &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 = 1, \;\; y > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Рассматривается оператор Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$. Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\Delta} u &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(K), \\ u|_{\gamma_0} &=& 1 & \text{в} & \mathbb{L}_2(\gamma_0), \\ u|_{\gamma_c} &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(\gamma_c). \end{array}$$

1.15. Пусть четверть круга $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 < 1, \;\; x > 0, \;\; y > 0 \right\}$ с границей $\partial K = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_c$, где:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1, \;\; y = 0 \right\}, \\ \gamma_2 &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = 0, \;\; 0 \le y \le 1 \right\}, \\ \gamma_c &= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 = 1, \;\; x > 0, \;\; y > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Рассматривается оператор Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$. Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\Delta} u &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(K), \\ u'_y|_{\gamma_1} &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(\gamma_1), \\ u|_{\gamma_2} &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(\gamma_2), \\ u|_{\gamma_c} &=& 1 & \text{в} & \mathbb{L}_2(\gamma_c). \end{array}$$

IV. Сферические функции. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаре и шаровом слое

1.16. Пусть $B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 1 \right\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad u|_{r=1} = y - z^2.$$

б) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = x^3.$$

в) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad \left. u - \frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = (x+y)z.$$

1.17. Пусть $B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 2 \right\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad u|_{r=1} = 2xy, \quad u|_{r=2} = z^2.$$

б) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad \left. u + \frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = xy, \quad u|_{r=2} = z.$$

в) Найти решение $u \in C^2(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = xyz, \quad (x,y,z) \in B, \quad u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = 0.$$

1.18. Пусть $B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1 \right\}$. Рассматривается оператор Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$.

а) Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Delta} u &=& 0, \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(B), \\ u|_{\partial B} &=& \cos(z) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(\partial B). \end{array}$$

б) Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\Delta} u &=& 0, \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(B), \\ u|_{\partial B} &=& xy\sin(z) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(\partial B). \end{array}$$

1.19. Пусть полушар $B = \left\{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2<1, \;\; z>0 \, \right\}$ с границей $\partial B = S_0 \cup S_c$, где:

$$\begin{aligned} S_0 &= \left\{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2<1, \;\; z=0 \, \right\}, \\ S_c &= \left\{ \, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2=1, \;\; z>0 \, \right\}, \end{aligned}$$

Рассматривается оператор Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$. Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\begin{array}{rcccl} \overline{\Delta} u &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(B), \\ u\big|_{S_0} &=& 0 & \text{в} & \mathbb{L}_2(S_0), \\ u\big|_{S_c} &=& 1 & \text{в} & \mathbb{L}_2(S_c), \end{array}$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Интегральные уравнения

2.1. Для интегрального оператора $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с конечномерным множеством значений найти все характеристические числа и найти все решения $f \in \mathcal{H}$ уравнения $f = \lambda A f + g$ для любого $g \in \mathcal{H}$ при всех значениях $\lambda \in \mathbb{C}$, если

а) оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int_0^1 \left[\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} + \left(\frac{x}{y}\right)^{1/3} \right] f(y)\, dy, \quad x \in (0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

б) оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,\pi] \to \mathbb{L}_2[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int_0^\pi \cos(2x+y)\, f(y)\, dy, \quad x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi];$$

в) $\mathit{\Pi} = \left\{ \, (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |x_1|<1, \; |x_2|<1 \, \right\}$, оператор $A\colon \mathbb{L}_2(\mathit{\Pi}) \to \mathbb{L}_2(\mathit{\Pi})$ имеет вид

$$(Af)(x_1,x_2) = \iint\limits_{\mathit{\Pi}} (x_1 x_2 + y_1 y_2)\, f(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2,$$

$$(x_1,x_2) \in \mathit{\Pi}, \quad f \in \mathbb{L}_2(\mathit{\Pi}).$$

г) $B = \{ \, x \in \mathbb{R}^3 \, : \, |x| < 1 \, \}$, оператор $A\colon \mathbb{L}_2(B) \to \mathbb{L}_2(B)$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_B \left(\frac{|y|}{|x|} + \frac{|x|}{|y|} \right) f(y)\,dy, \quad x \in B, \quad f \in \mathbb{L}_2(B);$$

2.2. Для интегрального самосопряжённого оператора $A\colon \mathbb{L}_2\,[a,b] \to \mathbb{L}_2\,[a,b]$ найти все характеристические числа и ортогональный базис в $\mathbb{L}_2[a,b]$ из собственных функций A. Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой функции $g \in \mathbb{L}_2[a,b]$ найти все решения $f \in \mathbb{L}_2[a,b]$ уравнения $f = \lambda A f + g$, если

а) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x y\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 x\,f(y)\,dy, \quad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

б) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x y(1-x)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 x(1-y)\,f(y)\,dy, \qquad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

в) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x (y+1)(x-2)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 (x+1)(y-2)\,f(y)\,dy, \qquad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

г) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x x(y+1)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 y(x+1)\,f(y)\,dy, \qquad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

д) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[-1,1] \to \mathbb{L}_2\,[-1,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_{-1}^x (1-x)(1+y)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 (1+x)(1-y)\,f(y)\,dy, \qquad x \in [-1,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[-1,1].$$

е) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,\pi] \to \mathbb{L}_2\,[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x \cos y \sin x\, f(y)\, dy + \int\limits_x^\pi \cos x \sin y\, f(y)\, dy,$$

$$x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi].$$

ж) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,\pi] \to \mathbb{L}_2\,[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x \sin y \cos x\, f(y)\, dy + \int\limits_x^\pi \cos y \sin x\, f(y)\, dy,$$

$$x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi].$$

II. Задача Штурма–Лиувилля

2.3. Для заданного оператора Штурма—Лиувилля $A\colon D(A) \to \mathbb{L}_2[0,1]$ доказать, что существует обратный оператор $A^{-1}\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to D(A)$, и для любой функции $g \in \mathbb{L}_2[0,1]$ вычислить функцию $A^{-1}g \in D(A)$, если:

а) $D(A) = \left\{\, f \in W^{2,2}[0,1] \,:\, f(0) = 0,\ f(1) + f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+x^2)f''(x) - 2xf'(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

б) $D(A) = \left\{\, f \in W^{2,2}[0,1] \,:\, f(0) - 2f'(0) = 0,\ f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+e^x)f''(x) - e^x f'(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

в) $D(A) = \left\{\, f \in W^{2,2}[0,1] \,:\, f'(0) = 0,\ f(1) - f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+x^2)f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

г) $D(A) = \left\{\, f \in W^{2,2}[0,1] \,:\, f'(0) = 0,\ f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -f''(x) - f(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A).$$

2.4. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[0,1]$. Доказать, что заданный оператор $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$ с областью определения $D(A) \subset \mathcal{H}$ является самосопряжённым, найти все его собственные числа и собственные функции. Доказать, что собственные функции A образуют в $\mathcal{H}$ ортогональный базис, и записать спектральное разложение оператора A, если:

а) $D(A) = \left\{\, f \in W^{2,2}[0,1] \ :\ f(0) = 0,\ \ f'(1) + f(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(L);$$

б) $D(A) = \{\ f \in W^{2,2}[0,1]\ :\ \ f'(0) + f(0) = 0,\ \ f'(1) = 0\ \}$,

$$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

Для каждого из указанных операторов и любого $v \in \mathcal{H}$ найти решение задачи

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} u(t) = -|A| u(t), \qquad & t > 0, \quad u(t) \in D(|A|) \\ u(+0) = v. \end{aligned}$$

III. Функции Бесселя. Смешанная задача с начальными условиями в круге и секторе

2.5. Пусть $K = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 < R^2\ \}$ для $R > 0$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(K)$ оператор Лапласа $\Delta \colon D(\Delta) \to \mathcal{H}$ с областью определения

$$D(\Delta) = \{\ f \in C^2(\overline{K})\ :\ \ f|_{\partial K} = 0\ \} \subset \mathcal{H}.$$

Найти замыкание $\overline{\Delta}$ оператора Δ, указав его область определения $D(\overline{\Delta})$ и выписав спектральное разложение $\overline{\Delta}$.

а) Для функции $v(x,y) = 1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}$ при $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$ найти решение задачи

$$\begin{aligned} i\tfrac{d}{dt} u(t) = \overline{\Delta} u(t), \qquad & t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = v. \end{aligned}$$

б) Найти решение задачи

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + p_0 \sin(\omega t), \qquad & t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = 0, \\ \tfrac{d}{dt} u(+0) = 0, \end{aligned}$$

если числа $p_0 > 0$ и $\omega > 0$, причём $J_0(R\omega) \neq 0$.

в) Для произвольного $T_0 > 0$ найти решение задачи

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} u(t) = \overline{\Delta} u(t), \qquad & t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = T_0. \end{aligned}$$

2.6. Пусть $K = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 < 1,\ \ y > 0\ \}$ для $R > 0$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(K)$ оператор Лапласа $\Delta \colon D(\Delta) \to \mathcal{H}$ с областью определения

$$D(\Delta) = \{\ f \in C^2(\overline{K})\ :\ \ f|_{\partial K} = 0\ \} \subset \mathcal{H}.$$

Найти замыкание $\overline{\Delta}$ оператора Δ, указав его область определения $D(\overline{\Delta})$ и выписав спектральное разложение $\overline{\Delta}$. Для функции $w(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ при $(x,y) \in K$ найти решение задачи

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2} u(t) = \overline{\Delta} u(t) + w \exp(-t), & \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = 0, & \\ \tfrac{d}{dt} u(+0) = 0. & \end{aligned}$$

Составитель задания Р. В. Константинов, к. ф.-м. н., доцент