

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
и довузовской подготовке  
А. А. Воронов  
30 июня 2020 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: Теория функций комплексного переменного  
по направлению  
подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»  
физтех-школа: ЛФИ  
кафедра: высшей математики  
курс: 3  
семестр: 5

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 5 зач. ед.;

лекции — 60 часов

практические (семинарские)

занятия — 45 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 105

Самостоятельная работа:  
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составил

д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяинов

Программа принята на заседании кафедры  
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Алгебра комплексных чисел и их геометрическое представление. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость и стереографическая проекция.
2. Комплексная дифференцируемость и условия Коши–Римана. Связность и характеристическое свойство области. Теорема о голоморфной в области функции с обращающейся в нуль производной. Теорема об обратной функции.
3. Степенные ряды и элементарные функции. Голоморфность суммы степенного ряда в круге сходимости. Свойства экспоненты и тригонометрических функций. Ветви логарифмической функции. Комплексные степени.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути. Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области. Усиление леммы Гурса.
5. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши для круга и бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Интегральная формула Коши для производных. Теоремы Морера, о среднем и Лиувилля.
6. Ряд Тейлора. Нули голоморфной функции и теорема единственности.
7. Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки относительно замкнутой кривой и его свойства. Общая форма теоремы Коши и её следствия для односвязной и многосвязной областей.
8. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана. Теорема Сохоцкого о поведении голоморфной функции в окрестности существенно особой точки. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
9. Регулярные ветви логарифма и корней. Теорема о существовании регулярной ветви логарифма голоморфной в области функции. Теорема о существовании регулярной ветви корня голоморфной в области функции. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.
10. Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфной функции. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области. Однолиственность и локальная однолиственность. Принцип максимума модуля и лемма Шварца. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Конформность в расширенной комплексной плоскости.

11. Локально равномерная сходимость. Теоремы Вейерштрасса и Гурвица. Принцип компактности.
12. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные преобразования. Ангармоническое отношение четырёх точек. Круговое свойство и принцип симметрии для дробно-линейных отображений. Конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского. Теорема Римана об отображении. Теорема о соответствии границ при конформном отображении (без доказательства).
13. Аналитическое продолжение. Теорема Коши–Адамара. Аналитическое продолжение вдоль пути и теорема о монодромии. Принцип симметрии Римана–Шварца.
14. Мероморфные функции. Теорема Миттаг–Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей.
15. Бесконечные произведения. Представление синуса в виде бесконечно-го произведения. Формула Эйлера и представление Гаусса для гамма-функции. Интеграл Френеля.
16. Гармонические функции и задача Дирихле. Связь между голоморфными и гармоническими функциями. Принцип экстремума и теорема единственности для гармонических функций. Конформная инвариантность. Теорема о среднем и интегральная формула Пуассона. Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.
17. Асимптотические методы и функция Эйри. Интегральные представления и свойства функции Эйри. Метод Лапласа и асимптотика гамма-функции. Метод стационарной фазы. Метод перевала и асимптотика функции Эйри.

## Литература

### Основная

1. *Горяйтов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.
2. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
3. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

### Дополнительная

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Санкт-Петербург : Лань, 2002.
5. *Сидоров Ю. В., Федоряк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.

## ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2004.

### Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные \*, являются необязательными для всех студентов.

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

### I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

§1: 3(2); 4(2); 11; 18.

§2: 3.

**T.1.** Найти вещественную и мнимую части комплексных чисел:

$$\text{а) } \left( \frac{1-i}{1+i} \right)^{2020} ; \quad \text{б) } (1+i)^n - (1-i)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**T.2.** Пусть  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  не лежат на одной прямой. Найти выражение для центра окружности, проходящей через эти три точки.

**T.3.** На единичной окружности  $|z| = 1$  взяты две точки  $a$  и  $b$ ,  $a + b \neq 0$ , и через них проведены касательные к окружности. Найти точку, в которой пересекаются эти касательные.

**T.4.** Покажите, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана соответствует в комплексной плоскости окружность или прямая.

**T.5.** Доказать, что для  $z, z' \in \mathbb{C}$  величина

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

выражает расстояние между прообразами этих точек при стереографической проекции.

**Т.6.** Параметрическое уравнение прямой в комплексной плоскости можно записать в виде  $z(t) = a + bt$ ,  $-\infty < t < \infty$ , где  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $b \neq 0$ . При этом направление прямой можно идентифицировать с направлением  $b$ . Покажите, что неравенство  $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} < 0$  выделяет правую полуплоскость (относительно прямой), а неравенство  $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} > 0$  выделяет левую полуплоскость.

**Т.7.** Пусть  $a, b$  — ненулевые комплексные числа. Рассматривая их как векторы в комплексной плоскости, покажите, что  $\operatorname{Re}\{\bar{a}b\}$  — их скалярное произведение, а  $|\operatorname{Im}\{\bar{a}b\}|$  — площадь параллелограмма со сторонами  $a$  и  $b$ .

**Т.8\***. Доказать, что точки  $z_1, z_2, z_3$  являются вершинами равностороннего треугольника в том и только том случае, если выполняется условие  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$ .

## II. Комплексная дифференцируемость. Голomorphic функции

### §5: 9(1,3).

**Т.9.** Найти области, в которых функция

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|, \quad z = x + iy,$$

является голоморфной.

**Т.10.** Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , является голоморфной в области  $D$  функцией. Докажите, что  $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$  во всех точках области  $D$ .

**Т.11.** Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$ , является дифференцируемой в вещественном смысле функцией и

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Покажите, что уравнения Коши—Римана можно записать в следующем виде  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

**Т.12.** Доказать, что если функция  $f$  определена в области  $D$ ,  $n$  раз дифференцируема в комплексном смысле и  $f^{(n)}(z) \equiv 0$ , то  $f$  — полином.

**Т.13\***. Доказать, что если все нули полинома  $P(z)$  лежат в некоторой полуплоскости, то все нули производной  $P'(z)$  лежат в той же полуплоскости.

Указание. Используйте равенство

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - a_1} + \dots + \frac{1}{z - a_n},$$

где  $a_1, \dots, a_n$  — нули полинома  $P(z)$ .

### III. Степенные ряды и элементарные функции

**Т.14.** Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 - in}{1 + in} \right)^{n^2} z^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (1 + i^n)^n z^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} ((1 + i)^n + (1 - i)^n) z^n.$$

**§3:** 10(3,4); 12(1); 13(1,3); 17(3,4,5).

**Т.15.** Найти значения  $\sin i$ ,  $\cos i$ ,  $\operatorname{tg}(1 + i)$ .

**Т.16.** Докажите следующие соотношения:

- а)  $\operatorname{sh} z = -i \sin(iz)$ ,  $\operatorname{ch} z = \cos(iz)$ ;  
б)  $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{z_1 + z_2}{2} \operatorname{ch} \frac{z_1 - z_2}{2}$ ;  
в)  $\cos^{2n} z = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=1}^n C_{2n}^{n+k} \cos(2kz)$ .

**Т.17.** Найти все значения  $2^i$ ,  $i^i$ ,  $(-1)^{2i}$ .

**Т.18\*.** Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность ненулевых комплексных чисел такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

Докажите, что тогда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ .

### IV. Комплексное интегрирование

**Т.19.** Вычислить интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} |z - 1| |dz|, \quad \int_{\mathbb{T}} |z - 1| dz,$$

где  $\mathbb{T}$  — положительно ориентированная единичная окружность.

**Т.20\***. Пусть  $P(z)$  – полином, а  $\gamma_R$  – положительно ориентированная окружность с центром в точке  $a$  и радиуса  $R$ . Покажите, что

$$\int_{\gamma_R} P(z) d\bar{z} = -i2\pi R^2 P'(a), \quad d\bar{z} = dx - idy.$$

**Т.21.** Вычислить интеграл  $\int_{\gamma} \cos^8 z dz$ , где  $\gamma$  – полуокружность:

$$z(t) = \pi + \pi e^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

**Т.22.** Доказать, что для  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} z > 0$ , выполняется неравенство

$$|e^{-z} - 1| \leq |z|.$$

**Т.23\***. Доказать, что для  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|z| \leq 1$ , выполняются неравенства

$$\frac{1}{4}|z| \leq |e^z - 1| \leq \frac{7}{4}|z|.$$

**Т.24.** Покажите, что формулу Грина можно записать в виде

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) dx dy = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} f(z) dz,$$

где  $z = x + iy$ ,  $D$  – жорданова область в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ .

## V. Ряд Тейлора и теорема единственности

§7: 5; 6(2); 11(2,3); 12(3).

§9: 2(1-9); 3.

**Т.25.** Функция  $f$  является суммой ряда  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ . Выразить через

$f$  сумму степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \alpha_n z^n$ .

**Т.26.** Функция  $f$  является голоморфной в единичном круге и для каждой точки  $x \in (-1, 1)$  на вещественном диаметре существует такое натуральное число  $n$ , что  $f^{(n)}(x) = 0$ . Является ли  $f$  полиномом?

## VI. Изолированные особые точки. Ряд Лорана

§11: 3(4); 4(6); 7(3); 10(6).

§12: 2(7); 8(3,7); 17(9); 20(5).

**Т.27.** Пусть функция  $f$  голоморфна в проколотом единичном круге  $0 < |z| < 1$  и при некоторых  $A > 0$  и  $\alpha \in [0, 1]$  выполняется неравенство  $|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^\alpha}$ . Определить тип изолированной особой точки  $z = 0$  при различных значениях  $\alpha$ .

**Т.28\***. Пусть степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  сходится в единичном круге, а его сумма  $f(z)$  имеет полюс в точке  $z = 1$  (например,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1-z)$ ). Докажите, что тогда этот степенной ряд не может сходиться ни в одной точке единичной окружности.

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

### I. Вычеты и вычисление интегралов

**§13:** 2(5); 3(5); 4(6); 5(3).

**§14:** 1(6); 2(3,8,17,24); 3(1).

**§23:** 1(4,8); 2(9,13,20).

**Т.1.** Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3ix + 4} dx.$$

**Т.2\***. Пусть  $f$  – голоморфная и ограниченная в единичном круге  $|z| < 1$  функция. Покажите, что для любого  $\zeta$ ,  $|\zeta| < 1$ , имеет место равенство

$$f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < 1} \frac{f(z)}{(1 - \bar{z}\zeta)^2} dx dy, \quad z = x + iy.$$

### II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

**§16:** 2; 4; 5; 7\*.

**§18:** 9(2,3); 25; 27; 35; 37\*; 38\*; 44\*.

**Т.3\***. Доказать, что функция

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{z}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$



является регулярной ветвью многозначной функции  $\{\sqrt{\pi z}\}$ . Разложить  $F(z)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 1$  и указать радиус сходимости этого ряда.

### III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 8; 10; 24; 25\*; 42; 46\*; 47\*.

§23: 5(2,4,8); 6(6,7,8); 7(1,7\*).

### IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(1,3,7,8\*).

Т.4. Найти число корней многочлена  $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$  в круге  $|z| < 1$ .

Т.5. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} z^6 \left( \frac{1}{3z^4 + z + 1} \right) dz.$$

Т.6\*. Доказать, что полином

$$P(z) = z^8 + az^3 + bz + c, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0,$$

имеет в первом квадранте ровно два корня.

## ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

### I. Принцип максимума модуля

Т.1. Пусть  $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n$ . Доказать, что если  $P(z) \neq z^n$ , то найдется на единичной окружности точка  $z_0$ , в которой  $|P(z_0)| > 1$ .

Указание. Рассмотрите функции  $g(z) = \frac{P(z)}{z^n}$  и  $f(\xi) = g(1/\xi)$ .

Т.2. Пусть  $P(z)$  – полином степени  $n$  и  $M(r) = \max_{|z|=r} |P(z)|$ . Докажите, что для  $0 < r_1 < r_2$  выполняется неравенство  $\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geq \frac{M(r_2)}{r_2^n}$ .

Т.3\*. Пусть  $f(z)$  – голоморфная в ограниченной области  $D$  и непрерывная в замыкании  $\bar{D}$  функция. Докажите, что если  $|f(z)| = R > 0$  на границе  $\partial D$  области  $D$ , то либо  $f(z) \equiv \text{const}$ , либо найдется точка  $z_0 \in D$ , в которой  $f(z_0) = 0$ . Останется ли верным утверждение в случае неограниченной области  $D$ ?

**Т.4\***. Пусть  $f(z)$  – голоморфная в единичном круге  $\mathbb{D}$  функция и  $d$  – диаметр образа  $f(\mathbb{D})$ . Докажите, что тогда  $|f'(0)| \leq \frac{d}{2}$ . Заметим, что лемма Шварца сразу же дает оценку  $|f'(0)| \leq d$ .

## II. Конформные отображения

§27: 4(5); 7(2); 8(2,4).

§28: 5 (рис.28.31, 28.34, 28.38, 28.45); 10 (рис. 28.51, 28.53, 28.61);  
12 (рис. 28.65); 13; 19 (рис. 28.71, 28.75, 28.80, 28.84, 28.85);  
20 (рис. 28.89).

§29: 3 (рис.29.19, 29.21).

## III. Бесконечные произведения и мероморфные функции

**Т.5.** Докажите, что в единичном круге сходится следующее бесконечное произведение и выполняется равенство

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

**Т.6.** Найти все целые функции  $f$ , которые удовлетворяют условию  $|f'(z)| < |f(z)|$  для всех  $z \in \mathbb{C}$ .

**Т.7.** Докажите, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

*Указание.* Используйте коэффициент при нулевой степени в разложении в ряд Лорана функции  $\pi^2 / \sin^2 \pi z$  в окрестности нуля.

**Т.8\***. Докажите, что при  $\operatorname{Re} z > 0$  выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} e^{(1-z)t} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

*Указание.* Проверить, что при  $\operatorname{Re} z > 0$  и  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} t e^{-(z+n)t} dt = \frac{1}{(z+n)^2}.$$

**Т.9\***. Докажите, что

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

#### IV. Задача Дирихле

**Т.10.** Решить задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

а)  $\Delta u = 0, u(e^{i\theta}) = \frac{\sin \theta}{5+4 \cos \theta};$

б)  $\Delta u = 0, u(e^{i\theta}) = \frac{4+5 \cos \theta}{(5+4 \cos \theta)^2}.$

**Т.11\*.** Используя технику конформного отображения, найти ограниченную гармоническую функцию  $u(z), |z| < 1$ , которая принимает значение 1 на верхней полуокружности  $|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0$ , и принимает значение 0 на нижней полуокружности  $|z| = 1, \operatorname{Im} z < 0$ .

#### V. Асимптотические методы

**Т.12.** Используя метод стационарной фазы, найти главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$(a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1} dt; \quad (b) \int_0^1 \cos t \cdot e^{i\lambda t^2} dt.$$

**Т.13.** Найти главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  функции Бесселя  $n$ -го порядка,  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\lambda \sin t - nt) dt.$$

**Т.14\*.** Найти главный член асимптотики при  $\lambda \rightarrow \infty$  интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t - t^4/4} dt.$$