

УТВЕРЖДЕНО  
Проректор по учебной работе  
и довузовской подготовке  
А. А. Воронов  
30 июня 2020 г.

## ПРОГРАММА

по дисциплине: Дифференциальные уравнения  
по направлению  
подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,  
16.03.01 «Техническая физика»,  
27.03.03 «Системный анализ и управление»

физтех-школа: ФАКТ  
кафедра: высшей математики  
курс: 2  
семестр: 3

Трудоёмкость:  
теор. курс: базовая часть — 2 зач. ед.;  
лекции — 30 часов  
практические (семинарские)  
занятия — 30 часов  
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:  
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев  
д. т. н., профессор А. Е. Умнов  
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская  
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова  
к. ф.-м. н., доцент С. Р. Свирцевский  
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры  
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

- 1. Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
- 2. Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
- 3. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения  $n$ -го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера. Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства). Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
- 4. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения  $n$ -го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений  $n$ -го порядка.

Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).

Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

*Поток А.М. Бишаева:* групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (*без доказательства*).

## Литература

### Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

2. *Филлипов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, <http://bookfi.org/book/791964>.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, <http://www.umnov.ru>.

### *Дополнительная*

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, <http://techlibrary.ru/bookpage.htm>.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатов В. М., Пыrkova О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

## ЗАДАНИЯ

### Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филлипов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

### Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные \*, являются необязательными для всех студентов.

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 октября)

### I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

**С. 2:** 4; 13; 33; 45. **Ф.** 67\*.

**Ф.** 109; 117.

**С. 3:** 22; 37; 55; 89. **Ф.** 147; 181\*.

**С. 4:** 4; 20; 55.

1. Решить уравнение:  $y' = \frac{y^2}{x^3} + 2\frac{y}{x} - x$ .

## II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 5; 18; 32; 41; 44; 67\*.

2. Решить задачу Коши:

$$y'' + 2y' = \frac{y'^2}{y+1} + \frac{y'}{x} \ln\left(\frac{y+1}{y'}\right), \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{2}{e}.$$

## III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225 (а, б, в, г); 228 (а, б); 230; 231; 233\*.

3. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:

а)  $y' = -y^2$ ,  $y(1) = -1$ ;

б)  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ ,  $y(-4) = -1$ ,  $y(2) = 1$ .

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

4\*. Доказать, что любое решение  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in (a, b)$ , задачи Коши

$$y' = x - y^2, \quad y(1) = 0$$
 можно продолжить на интервал  $(a, +\infty)$ .

## IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278, 282 (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 288.

С. 6: 25; 38.

5. Решить уравнение  $2y(y' + 2) - x(y')^2 = 0$ , исследовать особые решения, построить интегральные кривые. Выяснить, имеет ли это уравнение решение, удовлетворяющее условиям  $y(-2) = 8$ ,  $y(2) = 1$ .

6. Решить уравнение  $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$ , исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

36+6\*

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 декабря)

### I. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 3; 8; 13; 23; 32; 35; 42; 46; 57; 59; 62; 154; 162; 196; 201.

Ф. 613; 615; 617.

1. При каких значениях параметра  $a \in \mathbb{R}$  уравнение  $y'' + ay = \sin x$

а) имеет хотя бы одно ограниченное решение;

б) имеет ровно одно периодическое решение?

## II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 2; 8; 13; 18; 31; 44; 71; 76; 90; 138; 154; 178.

## III. Матричная экспонента

С. 11: 118; 125; 127 (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию  $x(0) = y(0) = 1$ ).

2. Решить задачу Коши:  $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$ ,  $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$ , где  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$ ,

$a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ , и  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$  — заданные число и столбец,

$\bar{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$  — искомая вектор-функция.

3\*. Доказать формулу:  $\det e^A = e^{\text{tr}A}$ .

## IV. Операционный метод

С. 8: 172; 183.

С. 11: 193; 196.

37+1\*