

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория групп**
по направлению
подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть — 3 зач. ед.;

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составил

к. ф.-м. н., доцент И. И. Богданов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа: порядок элемента и подгруппы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.
2. Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Нормальные подгруппы, факторгруппа. Теоремы о гомоморфизмах.
3. Действие группы на множестве, его свойства. Точность действия. Орбиты действия. Стационарные подгруппы (стабилизаторы). Формула орбит.
4. Примеры действия группы на множестве. Теорема Кэли о подгруппах симметрической группы. Стабилизатор элемента, нормализатор подгруппы.
5. Лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных элементов.
6. Группа автоморфизмов, нормальность подгруппы внутренних автоморфизмов.
7. Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Критерий разложимости группы в прямое произведение.
8. Центр группы, его свойства. Нецикличность факторгруппы по центру. Центр p -группы.
9. Коммутант группы. Разрешимые группы.
10. Свободная группа, её факторгруппы. Задание группы образующими и определяющими соотношениями.
11. Простые группы. Простота группы A_5 .
12. Силовские подгруппы конечной группы. Теоремы Силова: существование силовских подгрупп, их сопряжённость, их количество. Вложимость любой p -подгруппы в силовскую. Основные применения теорем Силова.
13. Конечно порождённые абелевы группы. Абелевы группы без кручения, их ранги и базисы. (Конечно порождённая) свободная абелева группа. Периодическая часть абелевой группы. Классификация конечно порождённых абелевых групп. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
14. Кольца и алгебры. Идеалы колец, факторкольца, основная теорема о гомоморфизме.

Литература

Основная

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 3. Основные структуры алгебры. — Москва : Физматлит, 2000; Москва : МЦНМО, 2009.
2. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2001.

Замечания

Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 13–19 октября)

I. Понятие группы. Симметрические группы

55.16; 55.21; 55.29; 56.8(а,б); 56.20(а); 56.18(а,б*); 3.2(б,д); 3.4(б); 3.7(б,д); 3.11*; 3.16(а,б*); 3.23*; 56.3(а,в,и); 56.6(а,в); 56.28*.

1. При каком условии на циклический тип перестановки она является квадратом другой перестановки?

II. Подгруппы, смежные классы

56.32(б); 56.36(б,г,з); 56.37; 56.39; 56.40; 56.42.

2. Пусть индексы подгрупп H_1 и H_2 в группе G являются взаимно простыми числами. Докажите, что $G = H_1H_2$, если
а) группа G конечна; б)* группа G бесконечна.

III. Нормальные подгруппы, гомоморфизмы

58.4(в); 58.6; 58.7; 58.12*; 58.15; 58.27(б,г); 58.28; 58.29(б,г); 58.30; 58.32(в,д).

IV. Действие группы на множестве

55.25(б,в); 57.1(в,г); 57.3(а); 57.14(б); 57.13(б,а*); 57.19; 57.38(б); 58.34; 58.35*; 58.36*.

3. Найти число раскрасок граней октаэдра в k цветов. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну можно получить из другой самосовмещением октаэдра.
- 4*. На грани правильного тетраэдра отмечена точка. Докажите, что тетраэдр можно разрезать на четыре равных выпуклых многогранника так, чтобы эта точка была вершиной одного из них.
- 5*. Докажите, что в любой группе порядка $4n+2$ есть подгруппа индекса 2.

V. Прямое произведение групп. Центр группы. Группа автоморфизмов

60.4; 60.6; 60.15(а,б); 60.10*; 60.17; 58.23(в,ж); 58.20*; 55.23; 55.32(в,г); 57.40(а,б); 57.45.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 01–07 декабря)

I. Коммутант. Разрешимые группы

62.5; 62.6; 62.8(в); 62.14; 62.20(а)*.

II. Образующие и соотношения

61.14; 61.15* ; 61.21(а,б); 61.22; 61.27; 61.28(б); 61.33(а).

III. Силовские подгруппы

59.5; 59.9(а,б); 59.11; 59.13(а,б,в); 59.16; 59.18(а,б); 59.20(в,г); 59.21; 59.22(б,г); 62.18(а,г); 59.23(а,б*).

IV. Абелевы группы

60.5(в); 60.7* ; 60.9; 60.35; 60.36; 60.39(г,з); 60.40(б,в); 60.43(б); 60.50; 60.52(д,и)
(также найти базис в A , согласованный с B); 60.54.

V.* Кольца и алгебры. Идеалы и факторкольца

63.1(д,к,о); 63.2(д,ж); 63.5; 63.6(а); 63.13(б); 63.19(а,в*); 64.1; 64.4; 64.10(а,г); 64.37(г); 64.42(а,б); 64.41(а,в); 64.47; 64.61; 64.62.

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент И. И. Богданов