УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские)
занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Интегрируемость ограниченных измеримых функций. Кратный интеграл от неотрицательных измеримых функций и от функций любого знака. Свойства интеграла: линейность, σ-аддитивность, непрерывность по множествам интегрирования. Предельный переход под знаком интеграла. Критерий интегрируемости по Риману на отрезке. Теорема Фубини. Замена переменных в кратном интеграле. Теоремы Рисса, Егорова, Лузина.
2. Функции ограниченной вариации на отрезке. Абсолютно непрерывные функции на отрезке. Неопределенный интеграл Лебега. Восстановление первообразной функции.
3. Дифференциальные формы на области в $\mathbb{R}^n$. Внешнее умножение, дифференцирование форм, замена переменных в формах. Замкнутые и точные формы. Форма $n-$мерного объема.
4. Интегрирование дифференциальных $n-$форм по областям в $\mathbb{R}^n$. Интегрирование форм по цепям. Формула Стокса-Пуанкаре для стандартного куба. Лемма Пуанкаре.
5. Элементарные многообразия (клетки), касательное расслоение клетки, ориентация клетки. Дифференциальные формы на клетке. Форма объема на клетке. Интегрирование форм по клеточным цепям. Формула Стокса-Пуанкаре для клеточных цепей.
6. Частные случаи интегрирования форм: криволинейные, поверхностные интегралы. Частные случаи формулы Стокса-Пуанкаре: формулы Грина, Стокса, Гаусса-Остроградского. Следствия леммы Пуанкаре (связь соленоидальности векторного поля с обращением в нуль его дивергенции, связь потенциальности с обращением в нуль ротора).
7. Гладкие многообразия, многообразия с краем. Интегрирование форм по ним. Теорема Стокса-Пуанкаре для ориентируемых гладких многообразий с краем.
8. Риманова метрика. Римановы многообразия. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу, ФОПФ. Ч. 2.
`https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki`
2. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа.
`http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`
3. *Лукашов А. Л.* Кратный интеграл (ФИВТ).
`https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/LukashovKI(ФИВТ).pdf`
4. *Лукашов А. Л.* Дифференциальные формы.
`https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/Lukasho_DF.pdf`
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Булдырев В. С., Павлов Б. С.* Линейная алгебра и функции многих переменных. — Ленинград : Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
7. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл — Москва : Факториал, 1998.
8. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–28 сентября)

I. Двойные интегралы

§8: 22(3) (найти также $\int_X f(x)d\mu(x)$); 80(3); $\underline{83(4)}$; 84(2); 85(5); 91(4)(обсудить также снятие ограничения $x \geq 0$); 100(7); $\underline{102(2)}$; 103(2); 107(5); $\underline{110(3)}$; $\underline{123(3)}$; 124(4).

§9: $\underline{8(3)}$; 11^*; 14(4); $\underline{20(1)}$.

II. Тройные и n-кратные интегралы

§8: 133($\underline{3}$, 5); 135(2); 139(4); 144(4^*,6); 146(3); 148(2); 152(1).

§9: 13(5); $\underline{21}$; 15(4); 16(7); 19(6, $\underline{7}$); 63(5).

§8: $175(5)^*$; $\underline{176(3)}$; 180^*; 181^*.

$\underline{\textbf{T.1}}$. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xyzdxdydz$:

а) сведя интеграл к повторному каким-либо способом;

б) перейдя к сферическим координатам;

в) перейдя к цилиндрическим координатам.

$$V = \{x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0\}.$$

(33+5 *)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–9 ноября)

I. Интеграл Лебега

Т.1. Пусть $f(x) = 0$ во всех точках канторовского множества и на интервалах длин $1/3, 1/9, \ldots$, выбрасываемых из отрезка $[0, 1]$ при его построении, $f(x) =$ соответственно $1, 2, \ldots$. Доказать, что f неинтегрируема по Риману на $[0, 1]$. Найти $\int_{[0,1]} f(x) d\mu(x)$.

Т.2. Пусть $f(x) \geq 0$ и для нее существует несобственный интеграл Римана

$$A = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

Доказать, что f интегрируема по Лебегу на $[a, b]$, причем ее интеграл совпадает с A.

Т.3. Пусть функция f суммируема на множестве $E, \mu(E) > 0$, и $f(x) > 0$ почти всюду на E. Доказать, что

$$\int_E f(x) d\mu(x) > 0.$$

Т.4. Доказать, что последовательность неотрицательных на E функций f_n такая, что $\int_E f_n(x) d\mu(x) \to 0$, сходится к нулю по мере, но не обязательно почти всюду.

<u>Т.5</u>. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две неотрицательные измеримые на E функции. Если $E_y = \{x \in E : g(x) \geq y$, то

$$\int_E f(x)g(x) d\mu(x) = \int_{[0,+\infty]} \Phi(y) d\mu(y),$$

где $\Phi(y) = \int_{E_y} f(x) d\mu(x)$.

<u>Т.6</u>. Докажите, что если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суммируема, то

$$\lim_{t \to 0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| d\mu(x) = 0.$$

II. Восстановление первообразной

<u>Т.7</u>. Выяснить, при каких значениях параметра α функция $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x}$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$.

<u>Т.8</u>. Представить в виде разности двух неубывающих функций функцию $y = \sin x$ $[0, 2\pi]$.

Т.9. Доказать, что функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует неубывающая ограниченная на $[a, b]$ функция φ такая, что если $a \leq x < y \leq b$, то

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(y) - \varphi(x).$$

Т.10*. Построить на отрезке $[0, 1]$ возрастающую функцию, множество точек разрыва которой совпадает с множеством рациональных чисел из $[0, 1]$.

Т.11. Доказать, что абсолютно непрерывная функция представима в виде разности неубывающих абсолютно непрерывных функций.

Т.12. Пусть функция f абсолютно непрерывна и возрастает на $[a, b]$, а φ абсолютно непрерывна на $[f(a), f(b)]$. Доказать, что функция $\varphi(f(x))$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$.

Т.13*. Докажите, что если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и ее производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_{[a,b]} f'(t) d\mu(t).$$

III. Дифференциальные формы

Т.14. Пусть $\alpha = xdx + ydy, \quad \beta = zdx \wedge dy - xdy \wedge dz, \quad \gamma = zdy$ на $\mathbb{R}^3$. Вычислить $d\alpha \wedge \gamma$, $d(\alpha \wedge \gamma)$, $\alpha \wedge d\gamma$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$.

Т.15. Вычислить $d(x_1^2 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + x_2^2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + x_n^2 dx_1 \wedge \wedge \ldots \wedge dx_{n-1})$.

Т.16. Пусть $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$. Найти $\phi^*(e^{y_1 y_3} dy_1 \wedge dy_2)$.

Т.17. Пусть $P_3(r, \varphi, \psi) = (r \cos\varphi \cos\psi, r \sin\varphi \cos\psi, r \sin\psi)$ - сферические координаты в $\mathbb{R}^3$. Найти $P_3^*(zdx \wedge dy)$, $P_3^*(xyzdx \wedge dy \wedge dz)$.

Т.18*. Пусть $P_n(r; \psi_1; \ldots; \psi_{n-1})$ – $n-$мерные сферические координаты в $\mathbb{R}^n$ (см. задачу §8, 180). Найти $P_5^*(x_1 dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5)$.

Далее все встречающиеся криволинейные и поверхностные интегралы второго рода также проинтерпретировать как интегралы от подходящих дифференциальных форм.

IV. Криволинейные интегралы второго рода. Формула Грина

§10: 23; 30(4); 32; 40*; 61; 101(6); 104(3).

Т.19. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

Т.20. Доказать, что дифференциальная форма $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ замкнута, но не точна в $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$.

Т.21. Доказать, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму – точная форма.

Т.22. Найти потенциал поля $\mathbf{F} = e^x \sin y\mathbf{i} + e^x \cos y\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

V. Поверхностные интегралы второго рода. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

§11: 31(2); 38; 40; 44(1); 45(3); 47(2); 52(3); 55; 66; 64.

Т.23. Проверить, что поле $\mathbf{F} = 6y^2\mathbf{i} + 6z\mathbf{j} + 6x\mathbf{k}$ соленоидально и найти его векторный потенциал.

(36+4*)

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–14 декабря)

I. Гладкие многообразия

Т.1. Доказать, что $n-$мерная сфера $\mathbb{S}^n$, задаваемая в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2 = 1$, является гладким многообразием

Т.2*. Привести пример двумерного неориентируемого многообразия

Т.3. Доказать, что $n-$мерный тор $\mathbb{T}^n$, задаваемый в $\mathbb{R}^{2n}$ уравнениями

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \ldots, (x^{2n-1})^2 + (x^{2n})^2 = 1,$$

является гладким многообразием.

II. Римановы многообразия. Криволинейные и поверхностные интегралы первого рода

§10: 2(2); 9; 14.

§9: 27; 35; 51.

§11: 3(4); 7(1); 11; 18(1).

<u>Т.4</u>. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Можно рассматривать сферу, заданную уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, и плоскости $z = c$ и $z = c + h$ ($c, c + h \in [-R; R]$). Зависит ли ответ от каких-либо параметров, кроме радиуса сферы R и расстояния между плоскостями h (при условии, что обе плоскости пересекают сферу)?

Т.5. Обобщить результат предыдущей задачи на случай сферы

$$S^3(R) = \{x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2\}$$

и гиперплоскостей (трехмерных пространств) $w = c$, $w = c + h$ с применением четырехмерных сферических координат в $\mathbb{R}^4$ (см. задачу §8, 180)

III. Элементы теории поля

§3: <u>44(2)</u>; 48(3).

§12: 13; 15(1, <u>3</u>, <u>5</u>); 40(1); 41(5, 6, 8); <u>42(2)</u>; 49(5, 6)*; 50(5); 54(1, 2); 70(5); 93(1); 94(1); 112.

(32+3*)

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов