УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 май 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Аксимы действительных чисел. Принцип Архимеда. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке (компакте) — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции. Теорема об обратной функции.
7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции, ее свойства. Тригонометрические функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцируемость параметрически заданной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Линейное, евклидово, нормированное и метрическое пространства, пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые и компактные множества. Полнота и компактность метрических пространств. Лемма Гейне–Бореля. Предел, непрерывность и равномерная непрерывность функций в метрических пространствах.
14. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.
15. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.
16. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

<u>*Дополнительная*</u>

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: Учебное пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Действительные числа

С1, § 3: 1(4); 3; 4.

Т.1. Доказать, что $\sqrt{2}$ иррациональное число.

Т.2. Доказать, что для $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\, x^2.$$

Т.3. Найти суммы:

а) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

б)* $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(3); 13(3); 15(2, 3); 18(6); 30(2); 31(1); 32(5, 6).

III. Производная

С1, §13: 32; 67; 106; 149.

Т.4. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1-\log_2 3x}}{\operatorname{cth}\left(x^3 + 2e^{x^4}\right)} \right)^{\arccos 3x^2}.$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(3); 276(7); 279(2); 300(2).

С1, §8: 2(4) (по определению); 13(1); 17(1, 2); 25(1); 27; 28*; 46.

С1, §8: 91; 53(2); 74(2); 7; 71(1); 60 (для всех $a > 0$); 67; 63(4).

С1, §8: 119; 121; 116(1); 117(2); 141(2); 143(3); 147(3); 158; 164(1); 220*; 246(1, 2*, 3*).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(4).

С1, §9: 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(2); 29(2, 5); 33(1); 35(4); 61.

С1, §10: 5(2)(по определению); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 44; 46; 47*; 66*; 76.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, § 3:** 1(4); 3; 4; Т.1; Т.2; Т.3(а, б*). **С1, § 5:** 4(3); 13(3); 15(2, 3); 18(6); 30(2); 31(1); 32(5, 6).
2 неделя	**С1, §13:** 32; 67; 106; 149; Т.4. **С1, §7:** 275(3); 276(7); 279(2); 300(2). **С1, §8:** 2(4); 13(1); 17(1, 2); 25(1); 27; 28*; 46.
3 неделя	**С1, §8:** 91; 53(2); 74(2); 7; 71(1); 60; 67; 63(4). **С1, §8:** 119; 121; 116(1); 117(2); 141(2); 143(3); 147(3); 158.
4 неделя	**С1, §8:** 164(1); 220*; 246(1, 2*, 3*). **С1, §7:** 218(5); 219(4). **С1, §9:** 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(2); 29(2, 5).
5 неделя	**С1, §9:** 33(1); 35(4); 61. **С1, §10:** 5(2); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 44; 46; 47*; 66*; 76.

$\boxed{72 + 7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: <u>197(2)</u>; 201(3); 214(4); <u>173</u>; 179(2).

С1, §14: 10(3).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(6); 10(2); 13(2); 14(4); <u>22(2)</u>; 24(8, <u>10</u>, 14); 25(3, 5, <u>9</u>); 26(1, 4).

III. Теоремы о среднем

С1, §16: <u>5</u>; 15(3); <u>19</u>; <u>33</u>; 30; 20*.

IV. Формула Тейлора

С1, §9: 50; 51.

Т.1. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \to 0$.

Т.2. Докажите, что если при $x \to 0$ верно $f(x) = o\big(g(x)\big)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o\big(h(x)\big)$ при $x \to 0$.

Т.3. Для каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 4x + 4 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \to x_0$?

<u>Т.4</u>. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$ с точностью до $o(x^5)$ функцию $f(x) = (x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

С1, §18: <u>2(9)</u>; 3(4, 9); 4(6); 5(6); 14(2); 20(6); <u>30(1)</u>; 39(5, 6).

Т.5. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов

С1, §17: 14; 47; <u>64</u>; <u>76</u>; 80^*.

С1, §19: 7(2); 8(5); <u>14(6)</u>; 21(3); <u>30(3)</u>; 47(1); $58(3)^*$.

VI. Исследование функций

С1, §20: 2(9); 20(2); 23(1); 35^*; 39(6); 42(2); 69(<u>2</u>, 3); $71(4)^*$.

VII. Построение графиков функций

С1, §21: 4(4); 5(3); 9(3); 10(2); <u>12(8)</u>; 13(10); 15(5); $23(1)^*$; $31(1)^*$.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:** 197(2); 201(3); 214(4); 173; 179(2). **С1, §14:** 10(3). **С1, §15:** 1(6); 10(2); 13(2); 14(4); 22(2). **С1, §15:** 24(8, 10, 14); 25(3, 5, 9); 26(1, 4).
2 неделя	**С1, §16:** 5; 15(3); 19; 33; 30; 20^*. **С1, §9:** 50; 51; Т.1; Т.2; Т.3; Т.4; Т.5. **С1, §18:** 2(9); 3(4, 9); 4(6); 5(6); 14(2); 20(6); 30(1); 39(5, 6).
3 неделя	**С1, §17:** 14; 47; 64; 76; 80^*. **С1, §19:** 7(2); 8(5); 14(6); 21(3); 30(3); 47(1); $58(3)^*$.
4 неделя	**С1, §20:** 2(9); 20(2); 23(1); 35^*; 39(6); 42(2); 69(2, 3); $71(4)^*$. **С1, §21:** 4(4); 5(3); 9(3); 10(2); 12(8); 13(10); 15(5); $23(1)^*$; $31(1)^*$.

$\boxed{65 + 7^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Множества в конечномерных евклидовых пространствах

С3, §2: 9 а), б), г) (<u>3</u>, 4).

Т.1. Для множества $A = (-1; 0] \cup ([1; 2] \cap \mathbb{Q}) \cup \{3\}$, $A \subset \mathbb{R}$ найдите:
а) все внутренние точки; б) все точки прикосновения; в) все граничные точки; г) все предельные точки; д) все изолированные точки.

<u>Т.2</u>. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Докажите, что для любого $C \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $f(x) < C$ является открытым, а множество всех решений неравенства $f(x) \leq C$ – замкнутым.

С3, §1: 15; 18; 37.

<u>Т.3</u>. Является ли множество

$$A = \{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3 : e^{x_1^2+x_2^2} < 1 + x_3^2\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$:
а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Т.4. Верно ли, что из любого покрытия отрезка $[0;1]$ отрезками можно выделить конечное подпокрытие?

Т.5*. Докажите, что всякое непустое ограниченное открытое множество $A \subset \mathbb{R}$ является объединением конечного или счетного набора попарно непересекающихся интервалов.

II. Предел и непрерывность функций нескольких переменных

С3, §2: $37(\underline{2}, 8)$; $48(6^*, 8)$; 51; 71^*.

Т.6. Для функции $f(x,\, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ исследовать существование предела в точке $(0,\, 0)$. Проверить, что предел по каждому направлению равен нулю.

Т.7. Исследовать на непрерывность в $\mathbb{R}^2$ функцию

$$\underline{\text{а)}} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{б)} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & x \neq y, \\ x+y, & x = y. \end{cases}$$

Является ли множество точек разрыва функции f открытым или замкнутым в $\mathbb{R}^2$?

III. Равномерная непрерывность

С1, §12: $2(4)$; $3(4, \underline{9})$; $4(3, 5^*)$; $\underline{7}$; 9; $\underline{17}$; 20; $\underline{23}$; $\underline{25}$.

Т.8. Пусть функция f дифференцируема на $I = [a,\, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

<u>а)</u> если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на I;
б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной на I;
в)* если f' не ограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

IV. Элементы дифференциальной геометрии

С1, §24: 48; 50; 78(2); $\underline{80(1)}$; 81(1); 109(1); 122(1); 14^*; $119(1)^*$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С3, §2:**	$9(\underline{3}, 4)$; Т.1; Т.2.
	С3, §1:	15; 18; 37; Т.3; Т.4; Т.5^*.
	С3, §2:	$37(\underline{2}, 8)$; $48(6^*, 8)$; 51; 71^*.
2 неделя		Т.6; Т.7.
	С1, §12:	2(4); 3(4, 9); $4(3, 5^*)$; 7; 9; 17; 20; 23; 25; Т.8(а, б, $в^*$).
3 неделя	**С1, §24:**	48; 50; 78(2); 80(1); 81(1); 109(1); 122(1); 14^*; $119(1)^*$.

$\boxed{34 + 7^*}$

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент М. А. Лунина

д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов