УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению
подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
Базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов

Экзамен — 1 семестр

практические занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
120 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Основные понятия теории множеств. Функции. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ как полное упорядоченное поле. Точные грани числовых множеств. Принцип полноты Вейерштрасса.

2. Предел числовой последовательности: единственность, ограниченность. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечные пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

3. Топология числовой прямой. Открытые и замкнутые множества. Предельные точки множества, критерии замкнутости. Биекции и мощность множеств. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

4. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Предел композиции. Критерий Коши существования предела функции. Теорема об односторонних пределах монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Равносильные определения непрерывности. Непрерывность композиции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Теорема Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней непрерывной на отрезке функции. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Непрерывность монотонной функции, отображающей промежуток на промежуток. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Экспонента и ее свойства. Непрерывность основных элементарных функций. O-символика.

7. Дифференцируемость функции в точке, производная и дифференциал. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Теорема о производной композиции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Теорема о производной обратной функции. Производные основных элементарных функций.

8. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Условия монотонности дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной.

Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

9. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения в нуле функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Выпуклые функции. Дифференциальные условия выпуклости.

10. Пространство $\mathbb{R}^n$. Кривые в $\mathbb{R}^n$. Длина кривой, натуральная параметризация. Кривизна и формулы Френе.

11. Теорема о структуре множества первообразных. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций.

12. Определенный интеграл Римана. Линейность и монотонность интеграла. Верхние и нижние суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Интегрируемость произведения и модуля интегрируемых функций. Теорема о среднем. Интегрируемость по подотрезкам. Аддитивность интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом: непрерывность и дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменой в интеграле. Интегрирование по частям. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1997.
3. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

4. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–28 сентября)

I. Действительные числа

Т.1. Найдите сумму

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n, \ \ x \neq 1.$$

Т.2. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Т.3. Докажите, что если a, $b \in \mathbb{R}$ и $a < b$, то существует такое $q \in \mathbb{Q}$, что $a < q\sqrt{2} < b$.

Т.4. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$. Докажите, что $\inf(-E) = -\sup E$, где $-E = \{-x \colon x \in E\}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(4); 15(4); 25(4); 30(5); 32(5).

III. Последовательности и их пределы

С1, §7: 275(3); 276(5); 279(1); 300(3).

С1, §8: 2(3) (по определению); 13(3); 18; 25(3); 27; 28; 46.

С1, §8: 53(4); 71(1); 60 (для всех $a > 0$); 63(4); <u>64(3)</u> 67; 164(1); 220.

С1, §8: 90(3); 91; 119; 120*; 123(2); 141(1); 143(1); 147(4); 158; 246(2*).

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** Т1; Т2; Т3; Т4. **С1, §5:** 4(4); 15(4); 25(4); 30(5); 32(5). **С1, §7:** 275(3); 276(5); 279(1); 300(3).
2 неделя	**С1, §8:** 2(3); 13(3); 18; 25(3); 27; 28; 46. **С1, §8:** 53(4); 71(1); 60; 63(4); 64(3) 67; 164(1); 220.
3 неделя	**С1, §8:** 90(3); 91; 119; 120*; 123(2); 141(1); 143(1); 147(4); 158; 246(2*).

$\boxed{36 + 2^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 27 октября – 02 ноября)

I. Топология числовой прямой

Т.1. Для множества $E = [1,2) \cup \{3\} \cup ([4,5) \cap \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$ найдите $\operatorname{int} E$ и $\overline{E}$.

Т.2. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}$ – непустое открытое множество. Покажите, что $\sup U \notin U$ и $\inf U \notin U$.

Т.3. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$. Покажите, что множество всех предельных точек E замкнуто.

II. Предел и непрерывность функции

С1, §7: 218(5); 219(3).
С1, §9: 1(1); 7(2); 16; 18; 25(2); 27(2); 30(2); 35(4); <u>61</u>.
С1, §10: 5(7) (по определению); 14; <u>22</u>; 23; 41(1); 47*; 66*; 76.

Т.4. Покажите, что функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна на E тогда и только тогда, когда $f^{-1}(a,b)$ открыто относительно E для любых a, $b \in \mathbb{R}$.

Т.5. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет период 1. Докажите, что существует точка x_0, такая что $f(x_0 + \pi) = f(x_0)$.

III. Равномерная непрерывность

С1, §12: 2(1, 2); 3(3); 4(3); 23.

<u>Т.6</u>. Докажите, что если функция $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества E.

IV. Приёмы вычисления производных

С1, §13: 33; 62; 99; 146; 214(2).

V. Приёмы вычисления первообразных

С2, §1: 2(16); 12(2); 13(7); 15(5, 11); 17(4); 24(4).

С2, §2: 2(1); 3(2); 4(3).

С2, §3: 4(2); 5(3); 18(5); 19(2).

С2, §4: 4(2); 18(6); 21(3).

С2, §5: 139; 184.

Т.7. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x^4+1}$.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**:**	Т1; Т2; Т3.
	С1, §7:	218(5); 219(3).
	С1, §9:	1(1); 7(2); 16; 18.
2 неделя	**С1, §9:**	25(2); 27(2); 30(2); 35(4); 61.
	С1, §10:	5(7); 14; 22; 23; 41(1); 47^*; 66^*; 76; Т4; Т5.
	С1, §12:	2(1, 2); 3(3); 4(3); 23; Т6.
3 неделя	**С1, §13:**	33; 62; 99; 146; 214(2).
	С2, §1:	2(16); 12(2); 13(7); 15(5, 11); 17(4); 24(4).
	С2, §2:	2(1); 3(2); 4(3).
4 неделя	**С2, §3:**	4(2); 5(3); 18(5); 19(2).
	С2, §4:	4(2); 18(6); 21(3).
	С2, §5:	139; 184; Т7.

$\boxed{53 + 2^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Дифференцируемость функции. Производные высших порядков

С1, §13: 179(4); 197(3); 201(2); 214(2); <u>173</u>.

С1, §15: 1(7); 14(3); 24(9, 13); 25(2, <u>10</u>); 26(2).

II. Теоремы о среднем

С1, §16: <u>5</u>; 15(2); 19; 33; 30.

Т.1. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

III. Формула Тейлора

С1, §9: 50; 51.

Т.2. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \to 0$.

Т.3. Докажите, что если $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to 0$.

С1, §18: 2(9); 3(5); 4(6); 5(4); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7).

Т.4. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$.

IV. Вычисление пределов

С1, §17: 27; 63; <u>76</u>; 80*.

Т.5. Найдите с помощью правила Лопиталя значения пределов в зависимости от параметров α и β:
а) $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha |\ln x|^\beta$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$.

С1, §19: 7(2); 14(5); 21(3); 31(3); 58(2)*.

V. Исследование функций и построение графиков

С1, §20: 33; 39(5).

С1, §21: 5(2); 10(3); 12(1, 10); 15(4); 23(4)*; 31(2)*.

Т.6. Докажите, что для положительных a, b, p, q, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, справедливо неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

VI. Касательная, нормаль и кривизна кривой

С1, §24: 48; 78(3); 81(6); 122(1); 118*.

VII. Определенный интеграл

С2, §6: 4(1); <u>24</u>; 118; 126; 54(4); <u>112(1)</u>; 108(1).

Т.7. а) Функция f имеет первообразную на отрезке $[a, b]$. Верно ли, что f интегрируема по Риману на $[a, b]$?

б) Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на $[a, b]$?

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:** 179(4); 197(3); 201(2); 214(2); 173. **С1, §15:** 1(7); 14(3); 24(9, 13); 25(2, 10); 26(2).
2 неделя	**С1, §16:** 5; 15(2); 19; 33; 30; T1. **С1, §9:** 50; 51; T2; T3. **С1, §18:** 2(9); 3(5); 4(6); 5(4); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7); T4.
3 неделя	**С1, §17:** 27; 63; 76; 80*; T5. **С1, §19:** 7(2); 14(5); 21(3); 31(3); 58(2)*.
4 неделя	**С1, §20:** 33; 39(5). **С1, §21:** 5(2); 10(3); 12(1, 10); 15(4); 23(4)*; 31(2)*; T6.
5 неделя	**С1, §24:** 48; 78(3); 81(6); 122(1); 118*. **С2, §6:** 4(1); 24; 118; 126; 54(4); 112(1); 108(1); T7.

$\boxed{60 + 5^*}$

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов
старший преподаватель А. Ю. Головко