УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
д. ф.-м. н., профессор А. П. Черняев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел.
   (*Для потока М.О. Голубева*: аксиомы действительных чисел, аксиома непрерывности.)
   (*Для потока А.П. Черняева*: парадокс Рассела, теорема непрерывности и теорема Дедекинда.)
   Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности.

3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне и по Коши, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

6. Свойства функций, непрерывных на отрезке (компакте) — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции. Теорема об обратной функции.

7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции, ее свойства. Тригонометрические функции. (*Для потока А.П. Черняева*: длина дуги — натуральный параметр.) Замечательные пределы, следствия из них.

8. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцируемость параметрически заданной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.
10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. (*Для потоков Я.М. Дымарского, С.А. Гриценко, Е.Ю. Редкозубовой*: теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу).)
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной дроби в сумму простейших дробей.
14. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.

15. (*Для потоков М.О. Голубева, Н.А. Гусева*: линейное, евклидово, нормированное и метрическое пространства, пространство $\mathbb{R}^n$. Открытые, замкнутые и компактные множества.)
16. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Теорема Лагранжа для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой. Формулы Френе.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
12. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа `http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`
13. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: Учебное пособие / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Действительные числа

С1, § 3: 1(4); 3; 4.

<u>Т.1</u>. Доказать, что $\sqrt{2}$ иррациональное число.

Т.2. Доказать, что для $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2.$$

Т.3. Найти суммы:

<u>а)</u> $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)}$;

б)* $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(3); 13(3); 15(<u>2</u>, 3); 18(6); 30(2); <u>31(1)</u>; 32(<u>5</u>, 6).

III. Производная

С1, §13: 32; 67; 106; 149.

Т.4. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{1-\log_2 3x}}{\operatorname{cth}\left(x^3 + 2e^{x^4}\right)}\right)^{\arccos 3x^2}.$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(3); 276(7); <u>279(2)</u>; 300(2).

С1, §8: 2(4) (по определению); 13(1); 17(<u>1</u>, 2); 25(1); 27; 28*; <u>46</u>.

С1, §8: <u>91</u>; 53(2); 74(2); 7; 71(1); 60 (для всех $a > 0$); 67; 63(4).

С1, §8: 119; 121; <u>116(1)</u>; 117(2); 141(2); <u>143(3)</u>; 147(3); <u>158</u>; 164(1); 220*; 246(1, 2*, 3*).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: <u>218(5)</u>; 219(4).

С1, §9: $\underline{1(1)}$; 8(1); $\underline{16}$; 18; 25(5); 26(2); 29($\underline{2}$); 33(1); 35(4); $\underline{61}$.

С1, §10: 5(2)(по определению); 14; $\underline{22}$; $\underline{23}$; 40; $\underline{41(1)}$; 42; 44; 46; 47^*; 66^*; 76.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, § 3:** 1(4); 3; 4; Т.1; Т.2; Т.3(а, б*). **С1, § 5:** 4(3); 13(3); 15(2, 3); 18(6); 30(2); 31(1); 32(5, 6).
2 неделя	**С1, §13:** 32; 67; 106; 149; Т.4. **С1, §7:** 275(3); 276(7); 279(2); 300(2). **С1, §8:** 2(4); 13(1); 17(1, 2); 25(1); 27; 28^*; 46.
3 неделя	**С1, §8:** 91; 53(2); 74(2); 7; 71(1); 60; 67; 63(4). **С1, §8:** 119; 121; 116(1); 117(2); 141(2); 143(3); 147(3); 158.
4 неделя	**С1, §8:** 164(1); 220^*; 246(1, 2^*, 3^*). **С1, §7:** 218(5); 219(4). **С1, §9:** 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 26(2); 29(2).
5 неделя	**С1, §9:** 33(1); 35(4); 61. **С1, §10:** 5(2); 14; 22; 23; 40; 41(1); 42; 44; 46; 47^*; 66^*; 76.

$\boxed{71 + 7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–16 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: $\underline{197(2)}$; 201(3); 214(4); $\underline{173}$; 179(2).

С1, §14: 10(3).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(6); 10(2); 13(2); 14(4); $\underline{22(2)}$; 24(8, $\underline{10}$, 14); 25(3, 5, $\underline{9}$); 26(1, 4^*).

III. Теоремы о среднем

С1, §16: $\underline{5}$; 15(3); $\underline{19}$; $\underline{33}$; 30; 20^*.

IV. Формула Тейлора

С1, §9: 50; 51.

Т.1. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \to 0$.

Т.2. Докажите, что если при $x \to 0$ верно $f(x) = o\big(g(x)\big)$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o\big(h(x)\big)$ при $x \to 0$.

Т.3. Для каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 4x + 4 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \to x_0$?

$\underline{\text{Т.4}}$. Разложите по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 0$ с точностью до $o(x^5)$ функцию $f(x) = (x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

C1, §18: 2(9); 3(4, 9); 4(6); 5(6); 14(2); 20(6); 30(1); 39(4, 6).

Т.5. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов

C1, §17: 14; 47; 64; 76; 80*.

C1, §19: 7(2); 8(5); 14(6); 21(3); 30(3); 47(1); 58(3)*.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**C1, §13:** 197(2); 201(3); 214(4); 173; 179(2). **C1, §14:** 10(3). **C1, §15:** 1(6); 10(2); 13(2); 14(4); 22(2).
2 неделя	**C1, §15:** 24(8, 10, 14); 25(3, 5, 9); 26(1, 4*). **C1, §16:** 5; 15(3); 19; 33; 30; 20*.
3 неделя	**C1, §9:** 50; 51; Т.1; Т.2; Т.3; Т.4; Т.5. **C1, §18:** 2(9); 3(4, 9); 4(6); 5(6); 14(2); 20(6); 30(1); 39(4, 6).
4 неделя	**C1, §17:** 14; 47; 64; 76; 80*. **C1, §19:** 7(2); 8(5); 14(6); 21(3); 30(3); 47(1); 58(3)*.

$\boxed{50 + 4^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

C1, §12: 2(4); 3(4, 9); 4(3, 5*); 7; 9; 17; 20; 23; 25.

Т.1. Пусть функция f дифференцируема на $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на I;

б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной на I;

в)* если f' не ограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

II. Исследование функций

C1, §20: 2(9); 20(2); 23(1); 35*; 39(6); 42(2); 69(2, 3); 71(4)*.

III. Построение графиков функций

C1, §21: 4(4); 5(3); 9(3); 10(2); 12(2, 8); 13(10); 15(5); 23(1)*; 31(1)*.

IV. Элементы дифференциальной геометрии

C1, §24: 48; 50; 78(2); 80(1); 81(1); 109(1); 122(1); 14*; 119(1)*.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §12:** 2(4); 3(4, 9); 4(3, 5*); 7; 9; 17; 20; 23; 25; Т.1(а, б, в*).
2 неделя	**С1, §20:** 2(9); 20(2); 23(1); 35*; 39(6); 42(2); 69(2, 3); 71(4)*. **С1, §21:** 4(4); 5(3); 9(3); 10(2); 12(2, 8).
3 неделя	**С1, §21:** 13(10); 15(5); 23(1)*; 31(1)*. **С1, §24:** 48; 50; 78(2); 80(1); 81(1); 109(1); 122(1); 14*; 119(1)*.

$\boxed{34 + 8^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент М. А. Лунина