УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладные математика и информатика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Коллинеарные, компланарные векторы. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия над векторами в координатах. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Изменение координат при замене базиса.
2. Общая декартова система координат, прямоугольная (ортонормированная) система координат. Связь между координатами направленного отрезка и координатами его конца и начала. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.
3. Скалярное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном и произвольном базисе. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.
4. Левые и правые тройки векторов. Ориентированные площадь и объём (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности и компланарности векторов. Двойное векторное произведение.
5. Понятие об уравнении множества. Алгебраические линии и поверхности; пересечение и объединение алгебраических линий (поверхностей). Сохранение порядка при переходе к другой системе координат.
6. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Формула для расстояния от точки до прямой в прямоугольной системе координат. Условия пересечения и параллельности двух прямых. Пучок прямых.
7. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Условие параллельности двух плоскостей. Направляющий вектор пересечения двух плоскостей. Пучок плоскостей. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Формулы для расстояния от точки до плоскости и расстояния между скрещивающимися прямыми в прямоугольной системе координат.
8. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Асимптоты гиперболы. Сопряжённые диаметры. Вывод общего уравнения касательной к кривой второго порядка. Касательные к эллипсу, параболе и гиперболе.
9. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду в прямоугольной системе координат. Центр многочлена второго порядка.

Линейные пространства. Матрицы и определители

1. Матрицы, операции с матрицами, их свойства.
2. Понятия группы, кольца и поля. Примеры. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы. Изоморфизм групп, теорема Кэли. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы, её следствия. Характеристика поля, простое подполе. Группа перестановок, знак перестановки. Поле комплексных чисел, модуль и аргумент комплексного числа.
3. Линейное пространство. Понятие линейно (не)зависимой системы векторов. Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки.
4. Базис и размерность линейного пространства. Теорема об изоморфизме. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
5. Мощность конечного векторного пространства и конечного поля. Количество базисов и подпространств конечного линейного пространства.
6. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Ранг произведения матриц. Теорема о базисном миноре. Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы, их свойства. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду. Невырожденные и обратимые матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований.
7. Системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Кронекера–Капелли.
8. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств.
9. Линейные функции. Сопряжённое (двойственное) пространство, его размерность. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Биортогональный базис. Аннуляторные подпространства, их свойства.
10. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства, их матрицы. Операции над линейными преобразованиями, обратное линейное преобразование. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при замене базисов.

11. Определитель матрицы. Полилинейность и кососимметричность определителя. Поведение определителя при элементарных преобразованиях. Определитель произведения матриц и транспонированной матрицы. Разложение определителя по строке, столбцу. Явное выражение определителя через элементы матрицы. Однозначность задания определителя его свойствами. Теорема Крамера. Миноры и алгебраические дополнения. Формула обратной матрицы

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии илинейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, http://www.umnov.ru
3. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2005.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. — Москва : Физматлит, 2004.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт Петербург :Лань, 2008. (цитируется **С**)

Замечания

1. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 06–12 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядка

С: 15.2(5, 6); 15.5(1, 2, 7).

Т.1. Вычислите $c_{109}^{\mathrm{T}}(A_{140} - A_{141})c_{24}$.

Т.2. Найдите $|A_8|$, $|A_{177}|$, $|A_{203}|$, $|A_{209}|$.

Векторы. Скалярное, векторное и смешанное произведения

II. Линейные операции и линейная зависимость

С: 1.10; 1.11(2, 3); 1.12; 1.23(2, 3); 1.27; 1.37; 1.44; 1.50.

III. Скалярное произведение

С: 2.7(4); 2.9(1); 2.11; 2.21; 2.25; 2.27(2); 2.32; 2.36.

Т.3*. Используя скалярное произведение доказать, что в любом треугольнике прямая, проходящая через точку пересечения двух высот и третью вершину, перпендикулярна третьей стороне.

IV. Векторное и смешанное произведения

С: 3.1(2); 3.2(2); 3.8(1); 3.12; 3.13(2, 3); 3.16; 3.17(1); 3.23; 3.25; 3.26(3, 4); 3.28; 3.31.

Т.4. Для каждой грани тетраэдра построен вектор, направленный перпендикулярно грани вне тетраэдра, с длиной, численно равной площади этой грани. Докажите, что сумма четырёх построенных векторов равна нулю.

Т.5. Пользуясь правилом Крамера, решите системы 17.1(1, 4).

Т.6. Доказать, что если векторы $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ удовлетворяют равенству $[\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}] = [\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{a}}] = [\vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}]$, то $[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] = [\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}] = [\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}}]$

V. Замена базиса и системы координат

С: 4.1; 4.4; 4.12; 4.19; 4.25.

Прямая и плоскость.

VI. Векторные уравнения

С: 5.1; 5.3; 5.4; 6.1; 6.2; 6.4; 6.8; 6.10; 6.11(2, 4, 5, 8); 6.12.

VII. Общая декартова система координат

С: 5.7(1, 2); 5.20; 6.16(2); 6.29; 6.38(2); 6.41.

VIII. Прямоугольная система координат

С: 5.30; 5.35; 5.55; 5.61*; 6.50; 6.60; 6.61(2); 6.64(1); 6.64; 6.72(1); 6.80; 6.73(3).

IX. Кривые второго порядка

С: 9.1(2, 3); 9.4(4, 5, 9); 9.16(1, 2); 9.19(3).

Т.7. Найдите фокусы, директрисы и асимптоты кривых 9.4(4, 5).

Т.8. Дана кривая $3x^2 + 6xy - 4x - 2y = 0$. Найдите уравнение прямой, содержащей середины хорд, параллельных прямой $2x+y = 2$. Проверьте, что эта прямая проходит через центр кривой.

С: 7.25(4, 8); 7.26(3); 7.29; 7.38(4); 7.49; 7.50; 7.56; 7.62(2, 4).

С: 8.3(1); 8.9(1); 8.13; 8.28(3); 8.30(1)*.

Т.9. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней имеют одну и ту же площадь. Выразить эту площадь через полуоси гиперболы.

Т.10. Докажите, что гиперболы с одинаковым эксцентриситетом подобны, а с разным — нет.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 15.2(5, 6); 15.5(1, 2, 7); Т.1; Т.2. **С:** 1.10; 1.11(2, 3); 1.12; 1.23(2, 3); 1.27; 1.37; 1.44; 1.50. **С:** 2.7(4); 2.9(1); 2.11; 2.21; 2.25; 2.27(2); 2.32; 2.36; Т.3*.
2 неделя	**С:** 3.1(2); 3.2(2); 3.8(1); 3.12; 3.13(2, 3); 3.16; 3.17(1); 3.23; 3.25; 3.26(3, 4); 3.28; 3.31; Т.4; Т.5; Т.6. **С:** 4.1; 4.4; 4.12; 4.19; 4.25.
3 неделя	**С:** 5.1; 5.3; 5.4; 6.1; 6.2; 6.4; 6.8; 6.10; 6.11(2, 4, 5, 8); 6.12. **С:** 5.7(1, 2); 5.20; 6.16(2); 6.29; 6.38(2); 6.41.
4 неделя	**С:** 5.30; 5.35; 5.55; 5.61*; 6.50; 6.60; 6.61(2); 6.64(1); 6.64; 6.72(1); 6.80; 6.73(3). **С:** 9.1(2, 3); 9.4(4, 5, 9); 9.16(1, 2); 9.19(3); Т.7; Т.8.
5 неделя	**С:** 7.25(4, 8); 7.26(3); 7.29; 7.38(4); 7.49; 7.50; 7.56; 7.62(2, 4). **С:** 8.3(1); 8.9(1); 8.13; 8.28(3); 8.30(1)*; Т.9; Т.10.

$\boxed{104 + 3^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 24–30 ноября)

I. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы. Действия с матрицами

С: 16.22; 16.18(19, 22, 25) (также найти в каждой матрице базисный минор); 16.34(4, 6); 16.40*.

С: 17.5; 19.3; 19.6(17, 35, 41); 19.7(3); 19.9*; 19.14; 19.21; 18.17(1); 18.19*; 19.23.

Т.1. Докажите, что ранг произведения матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей

Т.2*. Дана прямоугольная таблица. В граничных её клетках расставлены рациональные числа. Докажите, что во всех внутренних клетках также можно расставить рациональные числа так, чтобы каждое число во внутренней клетке было равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.

С: 15.45(1, 2); 15.54(2, 3, 8, 10); 15.56*; 15.65(4)*.

Т.3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+2z+3t=2; \\ 2x+y+3z+5t=1; \\ 7x+4y-2z+5t=5; \end{cases}$ над полем F_{13}.

Т.4*. Система линейных уравнений с целыми коэффициентами имеет рациональное решение. Докажите, что она имеет решение по модулю p для всех, кроме конечного количества, простых p.

II. Линейные пространства

С: 20.6(2, 4, 6); 20.8(3); 20.14(6, 9); 20.18; 20.20; 20.22(7); 20.23(6, 7); 20.24(3); 20.29(1, 3).

С: 21.2; 21.3(2); 21.7(5, 7, 10); 21.6(4); 21.11; 21.12(1, 2).

Т.5. а) В системе $\mathcal{M}$ подмножеств n-элементного множества вместе с любыми двумя подмножествами $A, B \in \mathcal{M}$ содержится их симметрическая разность $A \triangle B$. Докажите. что количество элементов в $\mathcal{M}$ есть степень двойки.

б) В предыдущей задаче найдите количество таких множеств $\mathcal{M}$ мощности 2^k.

Т.6*. Пусть V — 10-мерное пространство над F_3, а U — его 5-мерное подпространство. Найдите количество прямых дополнений к U в V.

III. Линейные функции. Линейные отображения и преобразования

С: 31.19(2); 31.21; 31.22*; 31.30; 31.31(3); 31.35(1).

Т.7. Докажите, что функции $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ линейно независимы.

С: 23.6(4); 23.10(2); 23.14(3); 23.24(2, 3); 23.29(3); 23.40(1(б, в)); 23.62(3); 23.64(3); 23.70(2, 4); 23.71(1)*; 23.73.

Т.8*. Пусть $A\colon U \to V$ — линейное отображение. Докажите существование такого линейного отображения $B\colon V \to U$, что выполняются равенства $ABA = A$, $BAB = B$.

Т.9*. Пусть $A : L \to L$. Доказать, что $L = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A^2 = \operatorname{Ker} A$.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 16.22; 16.18(19, 22, 25); 16.34(4, 6); 16.40*. **С:** 17.5; 19.3; 19.6(17, 35, 41); 19.7(3); 19.9*.
2 неделя	**С:** 19.14; 19.21; 18.17(1); 18.19*; 19.23; Т.1; Т.2*. **С:** 15.45(1, 2); 15.54(2, 3, 8, 10); 15.56*; 15.65(4)*; Т.3; Т.4*.
3 неделя	**С:** 20.6(2, 4, 6); 20.8(3); 20.14(6, 9); 20.18; 20.20; 20.22(7); 20.23(6, 7); 20.24(3); 20.29(1, 3).
4 неделя	**С:** 21.2; 21.3(2); 21.7(5, 7, 10); 21.6(4); 21.11; 21.12(1, 2); Т.5(а, б); Т.6*.
5 неделя	**С:** 31.19(2); 31.21; 31.22*; 31.30; 31.31(3); 31.35(1); Т.7.
6 неделя	**С:** 23.6(4); 23.10(2); 23.14(3); 23.24(2, 3); 23.29(3); 23.40(1 (б, в)); 23.62(3); 23.64(3); 23.70(2, 4); 23.71(1)*; 23.73; Т.8*; Т.9*.

$\boxed{68 + 11^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–21 декабря)

I. Определители порядка n

С: 14.15; 14.21(2, 4, 5); 14.23(6, 10, 12, 18); 14.24(5, 7, 9*); 14.29*; 14.31(2); 14.43(1, 2)*.

Т.1*. Найдите необходимые и достаточные условия, при которых обратная к целочисленной матрице A также целочисленная.

Т.2. а) Каждый элемент матрицы A размера 1000×1000 равен либо 1, либо -1. Докажите, что $\det A$ делится на 2^{999}.

б)* Пусть дополнительно в каждой строке матрицы чётное число единиц. Докажите, что тогда $\det A$ делится на 2^{1000}.

Группы. Изоморфизм групп. Подгруппы. Поля.

Т.3. Выясните, какие из указанных множеств с операциями являются группами.

а) $(\mathbb{N}, +)$;

б) $(\mathbb{Z}, +)$;

в) $(n\mathbb{Z}, +)$;

г) множество комплексных чисел модуля r относительно умножения;

д)* непрерывные монотонные функции $f\colon [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющие условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$, относительно композиции;

е) полуинтервал $[0,1)$ относительно операции $\oplus$, где $\alpha \oplus \beta$ — это дробная часть числа $\alpha+\beta$;

ж) все инъективные отображения $\sigma\colon [n] \to [n]$, где $[n]=\{1,\ldots,n\}$, относительно композиции;

з) все инъективные отображения $\sigma\colon [n] \to [n]$, переводящие простые числа в простые, относительно композиции;

и) невырожденные матрицы порядка n относительно умножения;

к) невырожденные матрицы порядка n относительно сложения;

л) верхнетреугольные матрицы порядка n с единицами на главной диагонали относительно умножения;

м)* верхнетреугольные матрицы с нулями на главной диагонали относительно операции $X \circ Y = X+Y-XY$.

Т.4. а) Изоморфны ли группы б), в) из предыдущей задачи?

б) Какие из групп г), е), и) из предыдущей задачи изоморфны?

в)* Тот же вопрос про группы к), л), м).

Т.5*. Пусть $(G,\cdot)$ — группа, a — произвольный её элемент. Определим $x \circ y = xay$. Докажите, что $(G,\circ)$ — группа, изоморфная G.

Т.6. Для каких групп G отображение $\varphi : G \to G$, $\varphi(x) = x^{-1}$ является изоморфизмом?

Т.7. Пусть a — элемент порядка n. Докажите, что порядки элементов a^k и a^ℓ равны тогда и только тогда, когда $(k,n)=(\ell,n)$.

Т.8. а) Докажите, что порядки элементов x и $y^{-1}xy$ равны.

б) Докажите, что порядки элементов ab и ba равны.

в)* Обязательно ли равны порядки элементов abc и cba? А элементов abc и bca?

Т.9. Пусть G — абелева группа. Докажите, что все её элементы, порядки которых делят n, образуют подгруппу.

Т.10. Пусть x и y — элементы порядков k и ℓ, причём $(k,\ell)=1$ и $xy=yx$. Докажите, что порядок элемента xy равен $k\ell$.

Т.11. Докажите, что существует поле из

а) 4 элементов;

б) 9 элементов;

в)* p^2 элементов при любом простом p.

Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 14.15; 14.21(2, 4, 5); 14.23(6, 10, 12, 18); 14.24(5, 7, 9*); 14.29*; 14.31(2); 14.43(1, 2)*; Т.1*; Т.2(а, б*).
2 неделя	**Т:** Т.3(а, б, в, г, д*, е, ж, з, и, к, л, м*); Т.4(а, б, в*);Т.5*; Т.6; Т.7; Т.8(а, б, в*); Т.9; Т.10; Т.11(а, б, в*).

$\boxed{32 + 12^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин