УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент П. А. Кожевников

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Введение

1. Матрицы и детерминанты малых размеров. Системы линейных уравнений. Множества. Логика. Индукция.

Векторы и декартовы системы координат (ДСК) на плоскости и в пространстве

1. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Изменение координат при замене базиса.
2. Скалярное произведение, его свойства. Проекция вектора на направление. Выражение скалярного произведения в ортонормированном и произвольном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами.
3. Левые и правые тройки векторов. Ориентированный объём параллелепипеда (смешанное произведение). Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Критерий компланарности.
4. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Вычисление площадей, перпендикуляр к паре векторов. Двойное векторное произведение.
5. Общая декартова система координат, прямоугольная система координат. Замена декартовой системы координат, формулы перехода. Полярная, цилиндрическая, сферическая системы координат.

Многочлены–1

1. $\mathbb{R}[X]$. Степень многочлена. Сложение, умножение, деление с остатком.
2. Корни многочлена. Теорема Безу. Кратность корня, число корней с учетом кратности не превосходит степени. Формальное и функциональное равенство многочленов. Теорема Виета.
3. Многочлены от нескольких переменных. Степень, ее инвариантность относительно линейной замены. Лемма о старшем члене.
4. Понятие уравнения множества. Алгебраические множества (линии и поверхности); пересечение и объединение алгебраических множеств. Порядок, сохранение порядка при переходе к другой системе координат. Пересечение алгебраического множества с прямой и с плоскостью.

Системы координат. Прямые и плоскости. Эллипс, гипербола, парабола. Поверхности

1. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Линейное неравенство. Пучок прямых. Формула расстояния от точки до прямой.

2. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух и трех плоскостей. Линейное неравенство. Пучок плоскостей. Формула расстояния от точки до плоскости.
3. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Взаимное расположение двух прямых. Формулы для расстояния от точки до прямой (в пространстве) и между скрещивающимися прямыми.
4. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Касательные. Оптическое свойство.
5. Цилиндрические, конические поверхности, поверхности вращения. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды. Прямолинейные образующие.

Матрицы. Элементарные преобразования

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число. Транспонирование. След матрицы.
2. Линейные комбинации, линейная оболочка систем векторов-столбцов (или матриц). Линейная зависимость. Ранг. Базисная подсистема. Основная теорема о рангах. Стандартный и треугольный базис в $\mathbb{R}^n$. Строчный и столбцовый ранг матрицы. Оценка ранга суммы матриц.
3. Умножение матриц, его свойства. Суммирование, его тензорная запись. Отсутствие коммутативности умножения. Единичная матрица. Обратимые матрицы. Ранг произведения.
4. Элементарные преобразования строк и столбцов. Элементарные матрицы. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному (улучшенному ступенчатому) виду методом Гаусса.
5. Элементарные преобразования строк не меняют линейных соотношений между столбцами. Инвариантность строчного и столбцового ранга при элементарных преобразованиях. Теорема о ранге матрицы.
6. Невырожденные матрицы. Критерий обратимости – 1 (невырожденность = обратимость). Алгоритм нахождения обратной матрицы элементарными преобразованиями. Базисный минор (невырожденность подматриц на пересечение системы $r = \operatorname{rang} A$ линейно независимых строк и столбцов).

Системы линейных уравнений (СЛУ)

1. СЛУ. Разные виды заданий: матричное уравнение, линейная комбинация столбцов, матрица коэффициентов и расширенная матрица. Критерий совместности Кронекера-Капелли.
2. Однородные СЛУ, фундаментальная система решений (ФСР) и общее решение однородной СЛУ. Структура общего решения СЛУ. Алгоритм решения СЛУ методом Гаусса. Мощность ФСР $= n - \operatorname{rang} A$.

3. Восстановление СЛУ по множеству решений. Любая линейная оболочка — множество решений некоторой однородной СЛУ.

Абстрактные отображения

1. Понятие отображения и преобразования. Терминология. Примеры. Отношение эквивалентности и фактор-множества. Бинарные операции на множестве.

Группы

1. Понятия полугруппы и группы. Абелевы группы. Аддитивная и мультипликативная форма записи. Порядок группы. Определения изоморфизма, гомоморфизма. Прямое произведение (прямая сумма). Обратимые элементы полугруппы. Подгруппы. Порождающие множества.
2. Примеры: числа по сложению и умножению; матрицы по сложению и умножению. Группы преобразований. Понятие действия группы на множестве. Понятие о представлении группы.
3. Порядок элемента. Циклические группы, их классификация. Количество порождающих элементов в $(\mathbb{Z}_n, +)$ равно $\varphi(n)$. Подгруппы циклической группы.
4. Симметрическая группа S_n. Независимые циклы. Число инверсий, четность перестановки. Знакопеременная подгруппа A_n.
5. Левые смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа, ее следствия: порядок элемента — делитель порядка группы; описание групп простого порядка; теоремы Ферма и Эйлера (в теории чисел).

Кольца и поля

1. Теория делимости в $\mathbb{Z}$. Простые числа. НОД. Алгоритм Евклида, линейное представление НОД. Разложение на простые множители и его единственность. Китайская теорема об остатках.
2. Арифметика по модулю n. Кольцо $\mathbb{Z}_n$. $\mathbb{Z}_{km} \cong \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_m$ при $(k, m) = 1$. $\mathbb{Z}_n$ — поле тогда и только тогда, когда n — простое. Характеристика поля.
3. Поле комплексных чисел, сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа, тригонометрическая запись. Умножение, возведение в степень, обращение. Извлечение корней. Группа корней n-й степени из 1. Матрицы с комплексными коэффициентами.
4. Кольцо $\mathbb{F}[X]$ многочленов над полем. Неприводимые многочлены, НОД. Разложение на неприводимые сомножители и его единственность. Неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

Определитель

1. Детерминант (определитель) матрицы как полилинейная и кососимметричная функция столбцов. Явная формула (через элементы матрицы).

2. Изменение определителя при элементарных преобразованиях столбцов. Определитель треугольной матрицы. Критерий обратимости – 2 ($\det \neq 0$). Определитель транспонированной матрицы.
3. Определитель произведения матриц. Определитель матрицы с углом нулей. Разложение определителя по строке, столбцу.
4. Правило Крамера для решения СЛУ (с невырожденной матрицей коэффициентов), формула обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии илинейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. — Москва : МЦНМО, 2009.
3. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.
4. *Кожевников П.А.* Матрицы и системы линейных уравнений. — Москва : МФТИ, 2011.
5. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. (цитируется **Б**)
2. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре. — Москва : МЦНМО, 2009. (цитируется — **К**)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

Определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений

I. Определители

Б: 14.4(2, 5); 14.7(1, 3).

II. Матрицы

Б: 15.2(1); <u>15.5(1, 2)</u>; 15.10(1, 2); 15.11(1).

III. Системы линейных уравнений

Б: 17.1(4); 19.1(5)*.

Аналитическая геометрия – 1

IV. Линейные операции и линейная зависимость

Б: 1.6; <u>1.11(2, 3)</u>; 1.16; <u>1.17</u>; 1.24(1); 1.37; 1.38*; 1.50*; 1.51*.

V. Замена базиса и системы координат

Б: 4.3; 4.26(1); <u>4.19</u>.

VI. Скалярное произведение

Б: 2.27(2); 2.35; <u>2.21</u>, <u>2.45</u>.

Т.1. Найдите сумму ортогональных проекций вектора $\vec{a}$ на прямые, перпендикулярные

а) сторонам некоторого правильного треугольника (если $\vec{a}$ лежит в плоскости этого треугольника);

б)* граням некоторого правильного тетраэдра.

VII. Векторное и смешанное произведение

Б: 3.1(1); 3.7(2); <u>3.12</u>; 3.13(1, 2); 3.16; 3.20(1); 3.23; <u>3.33</u>; 3.28; 3.29 (также вычислить ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах взаимного базиса); 3.31*.

<u>Т.2</u>. Для каждой грани тетраэдра построен вектор, направленный перпендикулярно грани вне тетраэдра и равный по длине площади грани. Докажите, что сумма четырех построенных векторов равна $\vec{0}$.

Аналитическая геометрия – 2. Прямая и плоскость

VIII. Векторные уравнения

Б: 5.4(2).

Б: 6.1(1, <u>3, 4</u>); <u>6.3</u>; 6.9(1); 6.10(1); 6.11(3, 4, 8).

IX. Аффинные задачи

Б: 5.15; <u>5.19</u>.

Б: 6.16(2); <u>6.29(2)</u>; 6.38(2); 6.15*.

X. Метрические задачи

Б: 5.30; 5.35.

Б: <u>6.49(2)</u>; 6.60; 6.61(2); 6.64(1); 6.72(1); 6.73(3); <u>6.80</u>.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**Б:** 14.4(2, 5); 14.7(1, 3). **Б:** 15.2(1); 15.5(1, 2); 15.10(1, 2); 15.11(1). **Б:** 17.1(4); 19.1(5)*. **Б:** 1.6; 1.11(2, 3); 1.16; 1.17; 1.24(1); 1.37; 1.38*; 1.50*; 1.51*.
2 неделя	**Б:** 4.3; 4.26(1); 4.19. **Б:** 2.27(2); 2.35; 2.21, 2.45; Т.1(а, б*). **Б:** 3.1(1); 3.7(2); 3.12; 3.13(1, 2); 3.16.
3 неделя	**Б:** 3.20(1); 3.23; 3.33; 3.28; 3.29; 3.31*; Т.2. **Б:** 5.4(2); 6.1(1, 3, 4); 6.3; 6.9(1); 6.10(1); 6.11(3, 4, 8).
4 неделя	**Б:** 5.15; 5.19; 6.16(2); 6.29(2); 6.38(2); 6.15*. **Б:** 5.30; 5.35; 6.49(2); 6.60; 6.61(2); 6.64(1); 6.72(1); 6.73(3); 6.80.

$\boxed{62 + 7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

Многочлены – 1

I. Деление с остатком. Корни

К: 25.1(а); 26.1(а); 26.4, 26.3(а); 26.8*; 31.1(г).

Т.1. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 7x + 2 = 0$. Вычислить $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ и $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}$.

Аналитическая геометрия – 3

II. Кривые второго порядка

Б: 7.25(5); 7.26(4); 7.29*; 7.38(9); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(2); 7.64*.
Б: 8.9(5), <u>8.13</u>; <u>8.24(1)</u>; <u>8.28(6)</u>; 8.30(1).

Т.2*. Найдите множество точек, получаемых при отражении фокуса параболы относительно ее касательных.

III. Поверхности

Б: 10.38; 10.39; 10.32; <u>10.40</u>; 10.84.

Матрицы. Элементарные преобразования

IV. Ранг матрицы

Б: 16.18(17); <u>16.19(3)</u>.

Б: 16.22, 16.26(2); 16.41*; 16.33*; 16.40*; 20.14(9)*; 20.18*.

Т.3. Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

V. Умножение матриц

Б: 15.24(3); 15.22(2); 15.68; 15.71; 15.126*; 15.130*.

Т.4. Вычислите а) A^3, б)* $(E_4 + A)^{11}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

VI. Обратная матрица

Б: <u>15.45(2)</u>; 15.48(1, 3); 15.56; 15.57; 15.59; 15.64(4); 15.65(<u>1</u>, 5*); 15.54(3)*.

VII. Определители порядка n

Б: <u>14.15</u>, 14.21(12), 14.23(<u>6</u>, 10, 12, <u>16</u>); <u>14.24(7)</u>; 14.29*; 14.31(1, 2*); 14.36.

VIII. Системы линейных уравнений

Б: 18.1(7, 9); 19.6(4, <u>20</u>, 25); 18.13; 18.17(4); 19.14; 19.21; 19.29*; 20.22(3)*; 20.23(4)*.

Т.5*. Дана прямоугольная таблица, в граничных клетках которой расставлены действительные числа. Всегда ли можно расставить действительные числа во всех внутренних клетках так, чтобы каждое число во внутренней клетке было бы равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону? Если можно, то каким числом способов?

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**К:** 25.1(а); 26.1(а); 26.4, 26.3(а); 26.8*; 31.1(г); Т.1. **Б:** 7.25(5); 7.26(4); 7.29*; 7.38(9); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(2); 7.64*. **Б:** 8.9(5), 8.13; 8.24(1); 8.28(6); 8.30(1); Т.2*.
2 неделя	**Б:** 10.38; 10.39; 10.32; 10.40; 10.84. **Б:** 16.18(17); 16.19(3); 16.22, 16.26(2); 16.41*; 16.33*; 16.40*; 20.14(9)*; 20.18*; Т.3.
3 неделя	**Б:** 15.24(3); 15.22(2); 15.68; 15.71; 15.126*; 15.130*; Т.4. **Б:** 15.45(2); 15.48(1, 3); 15.56; 15.57; 15.59; 15.64(4); 15.65(1, 5*); 15.54(3)*. **Б:** 14.15, 14.21(12), 14.23(6, 10, 12, 16); 14.24(7); 14.29*; 14.31(1, 2*); 14.36.
4 неделя	**Б:** 18.1(7, 9); 19.6(4, 20, 25); 18.13; 18.17(4); 19.14; 19.21; 19.29*; 20.22(3)*; 20.23(4)*; Т.5*.

$\boxed{58 + 19^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

Абстрактные отображения

I. Отображения и преобразования. Отношения эквивалентности. Бинарные операции

К: 2.5(а, б, в, г*); 2.11(а, б, в).

Т.1. На множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ рассмотрим следующее отношение: $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}$. Проверить, что это — отношение эквивалентности и построить биекцию между множеством классов эквивалентности и множеством точек окружности.

Т.2. Проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$, где $m \circ n = m + n + mn = (1+m)(1+n) - 1$, — коммутативный моноид. Что служит его нейтральным элементом? Найти все обратимые элементы.

Группы

II. Определение и примеры групп

К: 55.1(г, д, е, ж*, з*, м*); 55.2*; 55.6(д, м, н, р*).

III. Изоморфизмы и гомоморфизмы групп

К: 55.18.

Т.3. Разбейте на классы попарно изоморфных групп следующие грyпы: $(\mathbb{Z}, +)$, $(n\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Т.4*. Изоморфны ли мультипликативные группы $\mathbb{R}^*$ и $\mathbb{C}^*$?

IV. Порядки элементов и циклические группы, прямые произведения

К: <u>55.21</u>; 56.7(а, б); 56.15(а, б); <u>60.45(а)</u>.

Т.5. В группе порядок любого элемента равен 2. Докажите, что эта группа абелева.

Т.6. Пусть G — абелева группа, $a \in G$ — элемент конечного порядка, $(\operatorname{ord} a,\, n) = 1$. Доказать, что уравнение $x^n = a$ разрешимо в группе G.

Т.7. Показать, что группа $\mathbb{Z}_7^*$ циклическая. Какие элементы являются ее порождающими?

Т.8*. Дать теоретико–групповое доказательство формулы $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$, где φ — функция Эйлера ($n \geqslant 1$).

V. Перестановки

К: <u>3.2(б)</u>; <u>3.4(а)</u>; 3.7(<u>в</u>, г).

Т.9. В задаче 3.7(в) найдите порядок данного элемента группы S_n, вычислить его 2020-ю степень.

Т.10. Сколько элементов порядка 6 в группе S_7?

VI. Смежные классы. Порождающие множества

К: 56.36(а, <u>в</u>, д, з*); 56.37; 56.38.

Т.11*. Доказать, что полная линейная группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порождается элементарными матрицами.

Кольца и поля

VII. Определение и примеры колец

К: 63.1 (<u>ж</u>, з, <u>д</u>, м) (также выяснить, какие из этих числовых множеств являются полями); 63.2 (<u>в</u>, з*); 63.11(а, г); 64.38*.

VIII. Арифметика в кольцах $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_n$

К: 66.20; 60.5 (<u>б</u>, в).

Т.12. а) Решите в целых числах уравнение $21x + 76y = 0$.

б) Решите в целых числах уравнение $21x + 76y = 1$. Сколько решений (x_0, y_0) удовлетворяют условию $0 \leq x_0 \leq 75$?

в) В кольце $\mathbb{Z}_{76}$ вычислите 21^{-1}.

Т.13. Постройте изоморфизм колец $\mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$.

IX. Многочлены – 2

К: 25.2 (б) (найти также линейное выражение НОД); <u>25.7(г)</u>; 27.2(а); 28.22(а); 28.9 (г)*.

X. Комплексные числа

К: 20.10*; <u>20.11(в)</u>; 21.1(д, р, <u>у</u>); 21.2(ж); 21.10; 22.7(л, <u>о</u>); 23.1(а).

Т.14. Покажите, что множество матриц $\left\{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} | \, x, y \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ является полем относительно операций сложения и умножения матриц. Покажите также что отображение $x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ задает изоморфизм поля $\mathbb{C}$ с полем матриц указанного вида.

Т.15. Проверить, что $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$, определенное как $\varphi(x) = \exp(2\pi i x)$, является гомоморфизмом групп. Найдите $\varphi(\mathbb{Q})$, ядро φ. Какое отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$ определяет φ?

Т.16*. Какие из элементов: 13, 19, в кольце $\mathbb{Z}[\,i\,]$ являются *неразложимыми*?

Т.17*. Постройте кольцевой изоморфизм $\mathbb{H} \to \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$ и решите уравнение $x^2 = -1$ в $\mathbb{H}$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**К:** 2.5(а, б, в, г*); 2.11(а, б, в); Т.1; Т.2. **К:** 55.1(г, д, е, ж*, з*, м*); 55.2*; 55.6(д, м, н, р*). **К:** 55.18; Т.3; Т.4*.
2 неделя	**К:** 55.21; 56.7(а, б); 56.15(а, б); 60.45(а); Т.5; Т.6; Т.7; Т.8*. **К:** 3.2(б); 3.4(а); 3.7(в, г); Т.9; Т.10. **К:** 56.36(а, в, д, з*); 56.37; 56.38; Т.11*.
3 неделя	**К:** 63.1 (ж, з, л, м); 63.2 (в, з*); 63.11(а, г); 64.38*. **К:** 66.20; 60.5 (б, в); Т.12; Т.13.
4 неделя	**К:** 25.2 (б); 25.7(г); 27.2(а); 28.22(а); 28.9 (г)*. **К:** 20.10*; 20.11(в); 21.1(д, р, у); 21.2(ж); 21.10; 22.7(л, о); 23.1(а); Т.14; Т.15; Т.16*; Т.17*.

$\boxed{63 + 16^*}$

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент П. А. Кожевников
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов