

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
30 июня 2020 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**
по направлению
подготовки: **03.03.01 «Прикладная математика и физика»,**
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 3 зач. ед.;

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., ст.преподаватель О. Г. Прончева
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 21 мая 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.
2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее свойства. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.
3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. *Матрица Грама*¹. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами. *Биортогональный (взаимный) базис*.²
4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения.
5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.
6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. *Пучок прямых на плоскости*³. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. *Расстояние между двумя прямыми в пространстве*⁴.
7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпен-

¹Для потока И.А. Чубарова.

²Для всех, кроме потока О.Г. Прончевой.

³Для всех, кроме потоков О.Г. Прончевой и Д.А. Терёшина.

⁴Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

дикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых*⁵.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.
9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат*⁶.
10. *Асимптотические направления. Диаметры линий второго порядка*⁷.
11. *Цилиндрические и конические поверхности*⁸. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус, их основные свойства. Прямолинейные образующие.
12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.
13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. *Понятие о группе преобразований*⁹.
14. Алгебраические операции с матрицами. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица.
15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Критерий обратимости. Правило Крамера. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии или линейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, <http://www.umnov.ru>.
3. *Чезлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. — Москва : Физматлит, 2004.

⁵Для потоков О.Г. Прончевой и И.А. Чубарова.

⁶Для потоков Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.

⁷Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

⁸Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

⁹Для всех, кроме потоков О.Г. Прончевой и Д.А. Терёшина.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт Петербург : Лань, 2008. (цитируется С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 05 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: 15.2(3); 15.4; 15.5(7, 8, 13); 15.16; 15.12(6); 15.18(2)*.

T.1*. Известно, что для матриц A , B и C определены произведения AB , AC , BC . Всегда ли при этом определено произведение B^2 ?

С: 14.4(2, 4); 14.7(3, 8); 17.2(4).

II. Векторы

С: 1.1; 1.6; 1.9; 1.11(1); 1.24(1); 1.23; 1.27; 1.32; 1.35*.

III. Замена базиса и системы координат

С: 4.5; 4.14; 4.19; 4.25.

T.2. Пусть векторы старого базиса имеют в некотором фиксированном базисе пространства координатные столбцы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, а векторы нового базиса — столбцы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$; S — матрица перехода от старого базиса к новому. Доказать, что $(\bar{e}'_1 \bar{e}'_2 \bar{e}'_3) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \bar{e}_3)S$.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведение

С: 2.7(5); 2.15(2); 2.21; 2.24; 2.27(3); 2.32; 2.38; 3.1; 3.8(1); 3.13(1, 2); 3.15; 3.20; 3.28(1); 3.31; 3.26(1)*; 3.33*.

T.3. Решить уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \frac{3}{4}\mathbf{x} - \frac{1}{4}\mathbf{a}$ относительно неизвестного вектора \mathbf{x} , считая вектор \mathbf{a} известным.

T.4. Здесь все векторы рассматриваются в трехмерном пространстве.

- а) Обладает ли векторное произведение свойством ассоциативности, т. е. верно ли, что для любых векторов выполняется $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]$?

- б)* Существует ли для векторного произведения правый единичный (или левый единичный) вектор, т. е. такой вектор e , что для любого вектора a выполняется $[a, e] = a$ (или $[e, a] = a$)?

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 15.2(3); 15.4; 15.5(7, 8, 13); 15.16; 15.12(6); 15.18(2)*; Т.1*; 14.4(2, 4); 14.7(3, 8); 17.2(4).
2 неделя	С: 1.1; 1.6; 1.9; 1.11(1); 1.24(1); 1.23; 1.27; 1.32; 1.35*.
3 неделя	С: 4.5; 4.14; 4.19; 4.25; Т.2; 2.7(5); 2.15(2); 2.21; 2.24; 2.27(3); 2.32; 2.38.
4 неделя	С: 3.1; 3.8(1); 3.13(1, 2); 3.15; 3.20; 3.28(1); 3.31; 3.26(1)*; 3.33*; Т.3; Т.4(a, б*).

42 + 6*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–09 ноября)

I. Прямая и плоскость

С: 5.3; 5.4; 5.6; 5.19; 5.38; 5.53; 5.55*; 6.1(2, 3, 4*); ~~6.3~~; 6.9; 6.10(1, 4); 6.11(5, 9); 6.15; 6.18(1); ~~6.25(5)~~; 6.39; 6.53(1); 6.60; 6.68(3); 6.72(2).

II. Линии второго порядка

С: 7.25(6); 7.33(1); 7.28*; 7.38(3); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(3); 7.57.

Т.1. Найти координаты фокусов эллипса, заданного в прямоугольной системе координат уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

С: 8.1(4); 8.2(3)*; 8.6(2); ~~8.9(1)~~; ~~8.24(1)~~; 8.28(4); 8.29(1)*; 9.1(2); 9.3(4); 9.4(1, 6); 9.19(2).

Рекомендации по решению

второго домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 5.3; 5.4; 5.6; 5.19; 5.38; 5.53; 5.55*; 6.1(2, 3, 4*); 6.3.
2 неделя	С: 6.9; 6.10(1, 4); 6.11(5, 9); 6.15; 6.18(1); 6.25(5); 6.39.
3 неделя	С: 6.53(1); 6.60; 6.68(3); 6.72(2); 7.25(6); 7.33(1); 7.28*; 7.38(3); 7.40(2); 7.49(1); 7.54(3); 7.57; Т.1.
4 неделя	С: 8.1(4); 8.2(3)*; 8.6(2); 8.9(1); 8.24(1); 8.28(4); 8.29(1)*; 9.1(2); 9.3(4); 9.4(1, 6); 9.19(2).

40 + 5*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–14 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: 10.3(7, 12); 10.9(2); 10.15; 10.38; 10.39; 10.40; 10.65(1); 10.82.

II. Аффинные преобразования плоскости

С: 12.28(1, 3); 12.40(1); 12.53(2, 4, 8); 9.13(2, 4); 12.32; 12.82 (для преобразования из задачи 12.81(7)).

T.1. Найти все неподвижные точки и инвариантные прямые аффинного преобразования, заданного формулами

$$x^* = 7x - 2y + 3 \quad y^* = 12x - 3y + 6.$$

III. Определители n -го порядка

С: 14.12; 14.15; 14.21(10); 14.23(6, 7, 12, 16); 14.24(7); 14.29*.

T.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det(A^{1001} - 2 \cdot A^{1000} + A^{999})$.

IV. Операции с матрицами. Обратная матрица

С: 15.11(1, 3); 15.22(3); 15.24(1); 15.45(2*, 5, 6); 15.48(1, 3, 6); 15.55*.

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 10.3(7, 12); 10.9(2); 10.15; 10.38; 10.39; 10.40; 10.65(1); 10.82.
2 неделя	С: 12.28(1, 3); 12.40(1); 12.53(2, 4, 8); 9.13(2, 4); 12.32; T.1.
3 неделя	С: 12.82; 14.12; 14.15; 14.21(10); 14.23(6, 7, 12, 16).
4 неделя	С: 14.24(7); 14.29*; T.2; 15.11(1, 3); 15.22(3); 15.24(1); 15.45(2*, 5, 6); 15.48(1, 3, 6); 15.55*.

38 + 3*

Составитель задания

ассистент А. А. Петрович