УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
09 января 2018 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **для всех школ**
факультет: **для всех факультетов (кроме ФОПФ)**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
Базовая часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
45 часов

Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 15 ноября 2017 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Умножение матриц. Обратная матрица. Условия обратимости матрицы. Формулы для элементов обратной матрицы.
2. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
3. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.
4. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
5. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.
6. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.
7. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.
8. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
9. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
10. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.
11. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Второе сопряженное пространство[1].

[1] Поток И.А. Чубарова.

12. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями[2].
14. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
15. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.
16. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
17. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство.
18. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы.
19. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования[3].
20. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.

22* Основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

Знаком (*) отмечен необязательный материал.

[2] Кроме потока И.А. Чубарова.

[3] Поток И.А. Чубарова.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, Физматлит, 2008.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — М.: МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 19–23 марта)

I. Матрицы

1. Обратная матрица

С: 15.45(2); 15.54(3, 12*); <u>15.56</u>; 15.58; 15.65(1, 5).

2. Ранг матрицы

С: 16.14; <u>16.18(17)</u>; <u>16.19(4)</u>; 16.34; 16.40*.

II. Системы линейных уравнений

С: 17.1(3); <u>18.1(9)</u>; 18.17(2); 19.6(4, 20); <u>19.7(3)</u>; 19.14*; 19.15*.

Т.1*. Матрица однородной линейной системы уравнений имеет блочный вид: $\left(A_1 \,|\, A_2\right)$, где $A_1(m \times k_1)$ и $A_2(m \times k_2)$ — матрицы полного столбцового ранга. Доказать, что фундаментальная матрица имеет блочный вид $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, где $\Phi_1(k_1 \times s)$ и $\Phi_2(k_2 \times s)$ — матрицы полного столбцового ранга.

III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис

   С: 20.3(2, 3, 4); 20.4(2, 3); 20.6(5, 6); 20.8(1); 20.14(6); 20.18; 20.20; 20.22(3); 20.23(4); 20.29.

2. Сумма и пересечение; прямая сумма

   С: 21.6(4); 21.7(3, 7); 21.13*.

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ

   С: 23.8(4, 6); 23.9(3); 23.14(1, 2).

Т.2. Найти матрицу линейного преобразования $\varphi_{\boldsymbol{v}}$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$, заданного формулой $\varphi_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}]$, где $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение, а $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^{\mathrm{T}}$ — данный вектор.

   С: 23.19; 23.24; 23.18; 23.29(4); 23.30(1); 23.40(1, а), в)).

Т.3*. Пусть φ — линейное преобразование пространства V. Доказать, что равенство $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}(\varphi^2) = \operatorname{Ker}\varphi$.

   С: 23.62(3); 23.70(1); 23.81*.

2. Линейные функции

   С: 31.21; 31.31(2); 31.22*; 31.37*.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 15.45(2); 15.54(3, 12*); 15.56; 15.58; 15.65(1, 5). **С:** 16.14; 16.18(17); 16.19(4); 16.34; 16.40*.
2 неделя	**С:** 17.1(3); 18.1(9); 18.17(2); 19.6(4, 20); 19.7(3); 19.14*; 19.15*; Т.1*.
3 неделя	**С:** 20.3(2, 3, 4); 20.4(2, 3); 20.6(5, 6); 20.8(1); 20.14(6); 20.18; 20.20; 20.22(3); 20.23(4); 20.29.
4 неделя	**С:** 21.6(4); 21.7(3, 7); 21.13*. **С:** 23.8(4, 6); 23.9(3); 23.14(1, 2); Т.2.
5 неделя	**С:** 23.19; 23.24; 23.18; 23.29(4); 23.30(1); 23.40(1, а), в)); Т.3*.
6 неделя	**С:** 23.62(3); 23.70(1); 23.81*. **С:** 31.21; 31.31(2); 31.22*; 31.37*.

$\boxed{50 + 10^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–18 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения, диагонализируемость

С: <u>24.13</u>; 24.14^*; 24.18(1); <u>24.20(3)</u>; $24.28(2)^*$; 24.29^*.

Т.1*. Пусть P — матрица оператора проектирования (см. задачи 24.18(1) и 24.82) в некотором базисе. Докажите, что ранг матрицы P равен ее следу.

Т.2*. Пусть A — матрица поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α (в некотором базисе). Выразить α через элементы матрицы A.

С: $24.30(20, \underline{30})$; <u>24.42(1)</u>; $24.26(2, 4^*)$.

2. Инвариантные подпространства

С: 24.69; <u>24.70</u>; <u>24.72(1)</u>; 24.82^*; 24.100^*.

II. Билинейные и квадратичные функции

С: $32.2(3, \underline{4})$; 32.3(2); <u>32.7(2)</u>; $32.8(6, \underline{12})$; <u>32.16</u>; $32.18(1, 3)$; 32.21^*.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация

С: <u>25.7</u>; 25.25(2); <u>26.13(3)</u>; 26.14(2); 26.15(2); <u>26.16(2)</u>; <u>26.27(2)</u>; 26.28(2); 26.42(2); <u>26.44(1)</u>.

Т.3. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ быть матрицей Грама некоторого базиса евклидова пространства?

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования

С: 28.34(1); <u>29.14(1)</u>; $29.19(1, \underline{7})$; $29.47(\underline{1}, 2)$; 25.50(2); 29.49; $29.53(2)^*$; 29.15^*.

Т.4*. На линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1,\, 1]$, со скалярным произведением из задачи 25.7, преобразование φ задано формулой $\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,\, y) f(x)\, dx$, где $K : [-1,\, 1] \times [-1,\, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

С: 32.27(3, <u>9</u>); 32.31*; 32.39(4); 32.36(1, <u>5</u>).

IV*. Тензоры

С: 35.3(1, 5); 35.4(2, 5); 35.14; 35.15.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 24.13; 24.14*; 24.18(1); 24.20(3); 24.28(2)*; 24.29*;Т.1*; Т.2*. **С:** 24.30(20, 30); 24.42(1); 24.26(2, 4*).
2 неделя	**С:** 24.69; 24.70; 24.72(1); 24.82*; 24.100*.
3 неделя	**С:** 32.2(3, 4); 32.3(2); 32.7(2); 32.8(6, 12); 32.16; 32.18(1, 3); 32.21*.
4 неделя	**С:** 25.7; 25.25(2); 26.13(3); 26.14(2); 26.15(2); 26.16(2); 26.27(2); 26.28(2); 26.42(2); 26.44(1); Т.3.
5 неделя	**С:** 28.34(1); 29.14(1); 29.19(1, 7); 29.47(1, 2); 25.50(2); 29.49; 29.53(2)*; 29.15*; Т.4*.
6 неделя	**С:** 32.27(3, 9); 32.31*; 32.39(4); 32.36(1, 5). **С:** 35.3(1, 5)*; 35.4(2, 5)*; 35.14*; 35.15*.

$\boxed{43 + 19^*}$

Составитель задания — ассистент С. А. Жестков