УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Базовая часть — 3 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Предел и непрерывность функции комплексного переменного.
2. Комплексная дифференцируемость функции комплексного переменного и условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной в области. Понятие гармонической функции двух переменных, связь с регулярной функцией.
3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, экспонента и тригонометрические, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви логарифмической функции и корня n-й степени.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути.
5. Лемма Гурса и интегральная теорема Коши для односвязной области. Обобщенная интегральная теорема Коши по границе области (доказательство для звездной области).
6. Интеграл Коши и его свойства. Интегральная формула Коши и бесконечная дифференцируемость регулярной функции. Интегральная формула Коши для производных.
7. Степенные ряды, первая теорема Абеля. Радиус и круг сходимости. Ряд Тейлора. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно сходящихся рядов из регулярных функций.
8. Нули регулярной функции и теорема единственности. Теорема Морера и теорема о стирании разреза. Взаимосвязь первообразных регулярной функции.
9. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность.
10. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана.
11. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
12. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\operatorname{Ln} z$ и $\sqrt[n]{z}$ в односвязной области, не содержащей нуля.

13. Теорема о существовании регулярной ветви логарифма регулярной в области функции. Теорема о существовании регулярной ветви корня регулярной в области функции. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.
14. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.
15. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных дробей. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей.
16. Аналитическое продолжение. Аналитические продолжения элементов с помощью конечной цепочки областей и вдоль пути, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие о (полной) аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства).
17. Особые точки аналитических функций.очки ветвления. Теорема Коши—Адамара.
18. Принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля регулярной функции и лемма Шварца. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Теорема о среднем для гармонической функции.
19. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Конформность в расширенной комплексной плоскости.
20. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные отображения и их свойства: конформность, групповое, круговое и принцип симметрии.
21. Конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Теорема о соответствии границ при конформном отображении (без доказательства).
22. Принцип симметрии при конформных отображениях.
23. Классическая и общая задачи Дирихле на плоскости. Теорема единственности решения общей задачи Дирихле. Конформная инвариантность гармонической функции. Интеграл Пуассона и решение общей задачи Дирихле в круге.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.
3. *Горяйнов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.

Дополнительная

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Санкт Петербург : Лань, 2002.
5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч, 1, 2. — Москва : Наука, 1985; Санкт Петербург : Лань, 2004.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге:
Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 05 октября)

I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

§1: 1(4); <u>4(2)</u>; <u>9(2)</u>; 10(7);19*.
§2: 1(3).

Т.1. Покажите, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана соответствует в комплексной плоскости окружность или прямая.

II. Элементарные функции. Ряды

§3: <u>12(1)</u>; <u>13(1)</u>; 17(3,4); 22(1).
§4: 6(4).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: 1(2,5); 7(3,4); 17(2,6,7).

Т.2. Найти области, в которых функция

$$f(z) = 2|xy| + i|x^2 - y^2|, \qquad z = x + iy,$$

является регулярной.

Т.3. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, является регулярной в области G функцией. Докажите, что $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$ во всех точках области G.

IV. Ряд Тейлора

§7: 3(8,10); 4; 6(4); 7; 12(2).

Т.4. Найти все значения 2^i, i^i, $(-1)^{2i}$.

V. Теорема единственности

§9: 2(5,7,8).

Т.5. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено равенство $f^n(z) = 0$. Доказать, что f — полином степени меньше n.

Т.6*. Пусть функция $f : G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть для любой точки $z \in G$ существует натуральное число n такое, что $f^n(z) = 0$. Является ли f полиномом?

VI. Ряд Лорана

§11: 4(4); 5(5); 7(4); 9(1); 10(10).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: 8(4,7); 15(5); 17(4); 20(7).

Т.7. Найти и исследовать все особые точки функции (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz + 3}{1 + \operatorname{ch} \pi z}\, e^{\frac{1}{z-i}}.$$

Т.8. Пусть дана регулярная в кольце $G = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ функция f такая, что найдутся действительные числа $A > 0$, $B > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, при которых справедливы неравенства

$$\frac{A}{|z|^\alpha} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall z \in G.$$

Определить при различных α тип особой точки 0 функции f.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 04–09 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 1(6); 3(3); <u>5(6)</u>.

§14: 1(6); 2(7,8,<u>18</u>,23); 3(2).

§23: 1(5,7); 2(8,16,<u>20</u>).

<u>Т.1</u>. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3ix + 4} dx.$$

<u>Т.2</u>. Используя равенство $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, вычислить интеграл $\int_0^\infty e^{-ix^2} dx$.

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 3; <u>5</u>; 7^*.

§17: 3,4, 8^*.

§18: 9(1,<u>3</u>); <u>24</u>; 25; 27; <u>36</u>; 37^*; 38^*; 46^*.

Т.3*. Доказать, что функция

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{z}}\, dt, \quad \mathrm{Re} z > 0,$$

является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{\pi z}\}$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать радиус сходимости этого ряда.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: <u>1(4)</u>; 8; 11; <u>24</u>; 25^*; <u>42</u>; 46^*; 47^*.

§23: 5(<u>3</u>,5,8); 6(3,<u>7</u>,<u>8</u>); 7(<u>1</u>,7^*).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(2,<u>3</u>,7,8^*); 4.

Т.4. Найти число корней многочлена $2z^6 + 2z^3 - 5z - 2$ в круге $|z| < 1$.

Т.5. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint_{|z|=1} z^6 \left(\frac{1}{3z^4 + z + 1} \right) dz.$$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Конформные отображения

§26: 3; 4; 10.

§27: <u>3(2)</u>; 6(2); 7(3); 8(<u>2</u>,4); 9(2).

§28: 5 (рис.28.31, 28.34, <u>28.38</u>, 28.42; 28.45); 10 (рис. <u>28.51</u>, 28.53, 28.57; <u>28.61</u>); 12 (рис. 28.65); <u>13</u>; 19 (рис. 28.71, <u>28.75</u>, 28.81, <u>28.84</u>, 28.85); 20 (рис. 28.89).

§29: 3(рис.29.19, <u>29.21</u>); 4^*; 5.

II. Задача Дирихле

<u>Т.1</u>. Решить классическую задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

а) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}$;

б) $\Delta u = 0,\ u(e^{i\theta}) = \frac{4+5\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$.

Т.2*. Решить общую задачу Дирихле в области $G = \{z \mid |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ с заданным граничным условием:

$$\Delta u = 0, \quad z \in G; \quad u|_{\operatorname{Im} z = 0} = 0,\ u|_{|z|=1} = 1.$$

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин