УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ФЭФМ, ФБМФ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
75 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор Е. С. Половинкин
к. ф.-м. н., доцент А. А. Хасанов
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Последовательности и ряды. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность.

2. Дифференцирование по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной в области. Сопряженные гармонические функции двух переменных.

3. Элементарные функции комплексного переменного: степенная, рациональная, показательная и тригонометрическая, их свойства. Теорема об обратной функции. Понятие о многозначной функции и ее регулярных ветвях. Главные регулярные ветви многозначных функций $\{\sqrt[n]{z}\}$ и $\mathrm{Ln} z$.

4. Интегрирование по комплексному переменному, свойства интеграла. Первообразная функции и полный дифференциал, их связь с интегралом, независящим от формы кривой.

5. Интегральная теорема Коши для регулярной функции. Лемма Гурса. Интегральная формула Коши. Интеграл Коши, его регулярность.

6. Степенные ряды, первая теорема Абеля, радиус и круг сходимости. Разложение в степенной ряд функции, регулярной в круге. Теоремы Вейерштрасса для локально равномерно сходящихся рядов из регулярных функций. Теорема единственности для регулярных функций.

7. Достаточные условия существования первообразной. Формула Ньютона–Лейбница. Теорема Морера.

8. Ряд Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце, его единственность и неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.

9. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация. Определение характера особой точки по главной части ряда Лорана.

10. Вычеты. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.

11. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Приращение аргумента функции $f(z)$ вдоль непрерывного контура. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\mathrm{Ln} z$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$ в односвязной области, не содержащей нуля. Условия существования и общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\mathrm{Ln} f(z)$ и $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций.

12. Целые функции. Теорема Лиувилля, теорема Сохоцкого–Вейерштрасса и теорема Пикара (последняя без доказательства) для целых функций.

13. Мероморфные функции. Теорема о представлении мероморфной функции в виде ряда элементарных дробей. Формула для $\operatorname{ctg} z$.
14. Понятия об аналитическом продолжении элементов друг в друга с помощью конечной цепочки элементов и вдоль контура, эквивалентность этих понятий. Единственность аналитического продолжения. Понятие об аналитической функции и ее римановой поверхности. Теорема о монодромии (без доказательства).
15. Особые точки аналитических функций, точки ветвления. Теорема Коши–Адамара о наличии особой точки на границе круга сходимости степенного ряда.
16. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
17. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолистность и многолистность в малом. Принцип максимума модуля регулярной функции. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Лемма Шварца.
18. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной области.
19. Дробно-линейные функции и их свойства.
20. Конформные отображения с помощью элементарных функций. Функция Жуковского и ее свойства. Теорема Римана о конформной эквивалентности односвязных областей (доказательство единственности). Принцип соответствия границ (без доказательства).
21. Теорема о стирании разреза. Принцип симметрии при конформных отображениях.
22. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга. Существование решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Литература

Основная

1. *Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Физматкнига, 2003.
2. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

Дополнительная

3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Москва : Наука, 1973, 1987; Санкт Петербург : Лань, 2002.
4. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2006.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 5 октября)

I. Комплексные числа

§1: 2(3, $\underline{4}$); 3(3); 5($\underline{4}$); 6; 9($\underline{3}$); 10(3, 5); 13; 18*.

II. Элементарные функции. Функциональные ряды

§3: 11($\underline{1}$, 3); 12($\underline{1}$, 2); 13($\underline{3}$, 5); 17($\underline{3}$, 5, 7).

III. Условия Коши–Римана. Гармонические функции

§5: 1(2, $\underline{4}$); 14(4); 17($\underline{3}$, 6).

IV. Ряд Тейлора

§7: $\underline{8}$; 11(2, $\underline{3}$).

V. Теорема единственности

§9: 2($\underline{5}$,7); 13($\underline{5}$).

Т.1*. Пусть функция $f\colon G \to \mathbb{C}$ регулярна в области G. Пусть существует натуральное число n такое, что для всех $z \in G$ выполнено $f^{(n)}(z) = 0$. Доказать, что f – многочлен степени меньше n.

VI. Ряд Лорана

§11: 4($\underline{6}$); 5(5); 7(2); 9(2); 10($\underline{6}$).

VII. Особые точки однозначного характера

§12: 8($\underline{3}$, 7); 15(4, $\underline{8}$); 17(9); 20(6).

$\underline{\text{Т.2}}$. Найти и исследовать все особые точки функции f (для полюса указать порядок)

$$f(z) = \frac{\sin\frac{3\pi z}{2}}{(\cos 2\pi z - \cos \pi z)(\cos\frac{4\pi^2}{z} - 1)} e^{\frac{1}{\sin \pi z}}.$$

Т.3*. Пусть регулярная в кольце $G = \{z|\ 0 < |z| < 1\}$ функция f такова, что найдутся действительные числа $A > 0$ и $B > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$, при которых справедливо равенство

$$\frac{A}{|z|^{\alpha}} \le |f(z)| \le \frac{B}{|z|^{\alpha+1}}, \quad \forall\, z \in G.$$

Определить тип особой точки 0 для функции f при различных α.

44[3*(18)]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–16 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

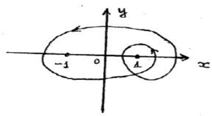
§13: 3(6); 4(6); 5(3); 6(2); 12(1).

§14: 2(3, 17, 21, 24); 3(1).

T.1. Вычислить интеграл от функции $f(z) = \frac{z^2}{z^2-1}\sin\frac{1}{z}$:

а) по малой петле гладкого контура, изображенного на рисунке;

б) по всему контуру.



§23: 1(6, 8); 2(13,20).

T.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+3ix+4}\, dx.$$

T.3*. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=18} \frac{|dz|}{|z-6+17i|^4}.$$

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 4; 5.

§17*: 3; 4.

§18: 9(2; 3); 24; 25; 35; 37*; 38*; 44*.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 8; 10; 24; 25*; 37; 46*; 47*.

§23: 5(2, 4, 8); 6(7, 8); 7(4).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(1, <u>3</u>, 7, 8^*).

§16: 7.

<u>Т.4</u>. Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

48[9^*(<u>18</u>)]

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Конформные отображения

§25: 1(6); 7(1).

§27: 7(2); 8(<u>2</u>, 4).

§28: 5(рис.<u>28.31</u>, 28.34, <u>28.37</u>, 28.32); 10(рис.<u>28.49</u>, 28.53, 28.57, <u>28.61</u>); 12(рис.28.65); <u>13</u>; 19(рис.28.71, <u>28.75</u>, 28.80, <u>28.84</u>, 28.85); 22(рис.28.95).

II. Принцип симметрии

§29: 3(рис.29.19, <u>29.22</u>); 4^*; 5; 6^*(рис.29.30).

25[2^*(<u>8</u>)]

Составитель задания — к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий