УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ЛФИ, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Вариативная часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
30 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Аксиома выбора. Лемма о неподвижном множестве. Частично упорядоченные множества. Теорема Хаусдорфа о максимальности и лемма Цорна.
2. Топологические пространства, база и предбаза топологии. Топологическое и секвенциальное определения замкнутости и замыкания множества топологического пространства, аксиома счётности.
3. Топологически и секвенциально непрерывные отображения топологических пространств. Критерий топологической непрерывности отображения.
4. Аксиомы отделимости в топологических пространствах. Хаусдорфово топологическое пространство.
5. Компактные, счётно-компактные и секвенциально-компактные подмножества топологического пространства. Теорема Александера о предбазе.
6. Декартово произведение топологических пространств, топология Тихонова. Теорема Тихонова о компактности декартова произведения компактных топологических пространств.
7. Метрические пространства и метрическая топология. Полнота метрического пространства, критерий полноты (принцип вложенных шаров). Теорема Бэра о категории. Теорема Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства.
8. Пополнение метрического пространства. Теорема Хаусдорфа о существовании пополнения. Изометричность двух пополнений неполного метрического простарнства.
9. Сепарабельные метрические пространства. Критерий несепарабельности метрического пространства.
10. Вполне ограниченные подмножества метрического пространства. Критерий Фреше компактности подмножества метрического пространства.
11. Топологические векторные и линейные нормированные пространства. Критерий Колмогорова нормируемости векторной топологии. Критерий полноты линейного нормированного пространства.
12. Эквивалентные нормы в линейном пространстве. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве.
13. Евклидово пространство и евклидова норма. Неравенство Коши—Буняковского—Шварца и равенство параллелограммов. Гильбертово пространство. Теоремы Рисса о проекции и об ортогональном разложении.

14. Лемма Рисса о почти перпендикуляре. Теорема Рисса об отсутствии вполне ограниченности сферы в бесконечномерном линейном нормированном пространстве.

15. Линейное нормированное пространсво $C(K)$ для компактного метрического пространства (K, ρ), его полнота. Критерий Арцела—Асколи вполне ограниченности подмножества пространства $C(K)$.

16. Линейное нормированное пространство $\mathbb{L}_p(E)$ для $1 \le p < +\infty$ и измеримого по Лебегу множества $E \subset \mathbb{R}^m$, его полнота. Критерий Рисса вполне ограниченности подмножества пространства $\mathbb{L}_p(E)$.

17. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных операторов, действующих в нормированных пространствах X и Y. Теорема о полноте пространства $\mathcal{L}(X, Y)$.

18. Теорема Банаха—Штейнгауза и полнота пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ относительно поточечной сходимости.

19. Критерий непрерывной обратимости линейного оператора, действующего в нормированных пространствах. Теоремы Банаха об открытом отображении, обратном операторе и замкнутом графике.

20. Компактные операторы в пространтве $\mathcal{L}(X, Y)$. Замкнутость подпространства компактных операторов $\mathcal{K}(X, Y)$ в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ Приближение компактного оператора конечномерным оператором.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. — Москва : Мир, 1975.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1993.
4. *Константинов Р. В.* Лекции по функциональному анализу: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2009.
5. *Треногин В. А., Писаревский Б;. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.

<u>*Дополнительная*</u>

6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1962.
7. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — Москва : МЦНМО, 2004.
8. *Архангельский А.В., Пономарёв В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — Москва : Наука, 1974.
9. *Кириллов А.А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — Москва : Наука, 1988.
10. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — Москва : Мир, 1970.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В. Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Частично упорядоченные множества. Лемма Цорна

1.1. На множестве $C[0,1]$, состоящем из всех функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, непрерывных на отрезке $[0,1]$, рассматривается бинарное отношение $\leq_C$ следующего вида: для функций $f, g \in C[0,1]$

$$f \leq_C g \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + \int\limits_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt \leq g(x) \quad \forall\, x \in [0,1].$$

а) Доказать, что рассматриваемое отношение $\leq_C$ задаёт на $C[0,1]$ частичный порядок.

б) Доказать, что для $f, g \in C[0,1]$ соотношение $f \leq_C g$ равносильно существованию числа $\alpha \geq 0$, такого, что $f(x) + \alpha = g(x)$ для всех $x \in [0,1]$.

в) Пусть $L \subset C[0,1]$ — непустое линейно-упорядоченное в $(C[0,1], \leq_C)$ множество, ограниченное сверху в обычном смысле, то есть

$$\exists\, R > 0 \quad \forall\, f \in L \quad \forall\, x \in [0,1] \quad \to \quad f(x) \leq R.$$

Доказать, что L имеет в $(C[0,1], \leq_C)$ мажоранту.

1.2. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. На $\mathbb{R}$ рассматривается бинарное отношение $\leq_f$ следующего вида: для $x, y \in \mathbb{R}$

$$x \leq_f y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + |x - y| \leq f(y).$$

а) Доказать, что рассматриваемое отношение $\leq_f$ задаёт на $\mathbb{R}$ частичный порядок.

б) Пусть $L \subset \mathbb{R}$ — непустое линейно-упорядоченное в $(\mathbb{R}, \leq_f)$ множество, ограниченное в обычном смысле, то есть

$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in L \quad \to \quad |x| \leq r.$$

Доказать, что L имеет в $(\mathbb{R}, \leq_f)$ мажоранту.

в) Доказать, что любой компакт $K \subset \mathbb{R}$ имеет в $(\mathbb{R}, \leq_f)$ максимальный элемент.

1.3. На множестве $\mathbb{L}_1[0,1]$, состоящем из всех функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебегу на $[0,1]$, рассматривается бинарное отношение $\leq_L$ следующего вида: для функций $f, g \in \mathbb{L}_1[0,1]$

$$f \leq_L g \quad \Leftrightarrow \quad |f(x)-g(x)| + \int\limits_{[0,1]} f\, d\mu \leq \int\limits_{[0,1]} g\, d\mu \text{ для почти всех } x \in [0,1].$$

Считаем функции $f, g \in \mathbb{L}_1[0,1]$ равными, если $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in [0,1]$.

а) Доказать, что рассматриваемое отношение $\leq_L$ задаёт на $\mathbb{L}_1[0,1]$ частичный порядок.

б) Доказать, что для $f, g \in \mathbb{L}_1[0,1]$ соотношение $f \leq_L g$ равносильно существованию числа $\alpha \geq 0$, такого, что $f(x) + \alpha = g(x)$ для почти всех $x \in [0,1]$.

в) Пусть $M \subset \mathbb{L}_1[0,1]$ — непустое линейно-упорядоченное в $(\mathbb{L}_1[0,1], \leq_L)$ множество, ограниченное в $\mathbb{L}_1[0,1]$ в обычном смысле, то есть

$$\exists\, R > 0 \quad \forall\, f \in M \quad \to \quad \int\limits_{[0,1]} |f|\, d\mu \leq R.$$

Доказать, что M имеет в $(\mathbb{L}_1[0,1], \leq_L)$ мажоранту.

1.4. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Лебегу множество положительной меры. На множестве $\mathbb{L}_1(E)$, состоящем из всех функций $f\colon E \to \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебегу на E, рассматривается бинарное отношение $\leq_\mu$ следующего вида: для функций $f, g \in \mathbb{L}_1(E)$

$$f \leq_\mu g \quad \Leftrightarrow \quad \int\limits_E f\, d\mu + \mu\{\, x \in E : \; f(x) < g(x) \,\} \leq \int\limits_E g\, d\mu.$$

Считаем функции $f, g \in \mathbb{L}_1(E)$ равными, если $f(x) = g(x)$ для почти всех $x \in E$.

а) Доказать, что рассматриваемое отношение $\leq_\mu$ задаёт на $\mathbb{L}_1(E)$ частичный порядок;

б) Пусть $M \subset \mathbb{L}_1(E)$ — непустое линейно-упорядоченное в $(\mathbb{L}_1(E), \leq_\mu)$ множество, такое, что

$$\exists\, h \in M \quad \forall\, f \in M \quad \to \quad \int\limits_E f\, d\mu \leq \int\limits_E h\, d\mu.$$

Доказать, что h — максимальный элемент в M в смысле отношения $\leq_\mu$.

1.5. Пусть X — нетривиальное линейное пространство. Множество $\Gamma \subset X$ называется *базисом Гамеля*, если любой нетривиальный вектор $x \in X$ можно единственным образом представить конечной линейной комбинацией элементов Γ. Доказать, что в X существует базис Гамеля. Привести пример линейного пространства со счётным базисом Гамеля.

II. Топологические пространства и их компактные подмножества

1.6. Пусть F — множество всех функций $f\colon [0,1] \to [0,1]$ с топологией τ поточечной сходимости. Пусть M — подмножество F, состоящее из всех измеримых по Лебегу функций. Пусть τ_0 — топология в $\mathbb{R}$ с базой из всевозможных интервалов.

1) Является ли отображения $I\colon (M,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_0)$ и $S\colon (F,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_0)$ вида

$$I(g) = \int\limits_0^1 g(x)\, dx, \quad g \in M, \qquad S(f) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(2^{-k}), \quad f \in F,$$

а) топологически непрерывными; б) секвенциально нерерывными?

2) Исследовать отображение $J\colon (F,\tau) \to (\mathbb{R},\tau_0)$ вида

$$J(f) = \sup\left\{ \int\limits_0^1 g(x)\, dx \ : \ g \in M,\ 0 \leq g(x) \leq f(x) \ \ \forall\, x \in [0,1] \right\}, \quad f \in F,$$

на топологическую и секвенциальную непрерывность.

3) Доказать, что (F,τ) — компактное топологическое пространство, не являющееся секвенциально компактным.

4) Привести пример множества $M \subset F$, которое является секвенциальным компактом и не является топологическим компактом в (F,τ).

1.7. Множество $C[0,1]$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$.

а) Доказать, что семейство множеств

$$\beta = \left\{ V_\varepsilon(f) = \left\{ g \in C[0,1] : \left| \int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx \right| < \varepsilon \right\} \;\middle|\; \begin{array}{c} f \in C[0,1], \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\}$$

образуют базу некоторой топологии τ в $C[0,1]$;

б) Для любой функции $f \in C[0,1]$ найти замыкание одноточечного множества $\{f\} \subset C[0,1]$ в топологическом пространстве $(C[0,1], \tau)$.

1.8. Пусть F — множество всех функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с топологией τ поточечной сходимости. Доказать, что (F, τ) — топологическое векторное пространство относительно поточечных операций сложения функций и умножения на вещественные скаляры. Найти все линейные непрерывные отображения $\Phi\colon (F, \tau) \to \mathbb{R}$.

1.9. Пусть F — множество всех функций $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ с топологией τ поточечной сходимости.

а) Привести пример множества $S_0 \subset F$, секвенциальное замыкание которого не совпадает с его τ–замыканием в пространстве (F, τ).

б) Привести пример множества $S \subset F$, секвенциальное замыкание которого в пространстве (F, τ) не является секвенциально замкнутым.

1.10. Доказать, что топологическое пространство (X, τ) является компактным если и только если любое его топологически замкнутое собственное подмножество является компактным.

1.11. Доказать, что семейство множеств

$$\tau = \{\, V \subset \mathbb{R} : \; V = \varnothing \; \text{ или } \; \mathbb{R} \backslash V \; \text{ – конечно или пусто} \,\}$$

является топологией в $\mathbb{R}$.

а) Привести пример компактного и незамкнутого в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau)$ множества $K \subset \mathbb{R}$.

б) Привести пример секвенциально компактного и секвенциально незамкнутого в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau)$ множества $S \subset \mathbb{R}$.

III. Метрические и линейные нормированные пространства: полнота, сепарабельность, пополнение

§ 1: 3; 4; 5; 7; 13.
§ 2: 2; 3; 6; 7.
§ 4: 1; 7; 8.

1.12. Пусть $1 \le p < q \le +\infty$. Доказать, что пространство $(\ell_p\,, \|\cdot\|_q)$ является неполным, представить его в виде счётного объединения нигде не плотных подмножеств, и построить его пополнение, состоящее из числовых последовательностей.

1.13. Пусть $1 \le p < q \le +\infty$. Доказать, что линейное нормированное пространство $(\mathbb{L}_q[0,1], \|\cdot\|_p)$ является неполным, а его пополнением является пространство $(\mathbb{L}_p[0,1], \|\cdot\|_p)$.

1.14. Пусть F — линейное пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ вещественных функций, норма в котором имеет вид

$$\|f\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|}{1+x^2}\,dx, \qquad f \in F.$$

Исследовать пространство $(F, \|\cdot\|)$ на полноту и сепарабельность. Если пространство $(F, \|\cdot\|)$ окажется неполным, то построить его пополнение.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Компактные и вполне ограниченные множества в метрических пространствах

§ 3: 4; 8; 10; 11; 12.

2.1. Пусть множество

$$S = \left\{\, f \in C^1[0,1] \;\;:\;\; \|f\|_{c^1} \overset{\text{def}}{=} \|f\|_c + \|f'\|_c = 1 \,\right\}.$$

а) Исследовать S в пространстве $(C[0,1], \|\cdot\|_c)$ на вполне ограниченность и замкнутость.

б) Исследовать замыкание S в пространстве $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_c\big)$ на вполне ограниченность и полноту.

в) Исследовать S в пространстве $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_{c^1}\big)$ на вполне ограниченность и замкнутость.

2.2. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества

$$1)\ S_1 = \left\{\, f \in \mathbb{L}_1[0,1] \;\;:\;\; 0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{п. в. } x \in (0,1) \,\right\},$$

$$2)\ S_2 = \left\{ f \in C^1[0,1] \ : \ \ f(0)=0, \ \ |f'(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \forall\ x \in (0,1) \right\}$$

в пространстве $\mathbb{L}_1[0,1]$.

2.3. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множеств

$$1)\ S_1 = \left\{ x \in c_0 \,:\, \exists\, f \in \mathbb{L}_1[0,1],\ \|f\|_1 \le 1,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ x(k) = \int\limits_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\,dt \right\},$$

$$2)\ S_2 = \left\{ x \in c_0 \,:\, \exists\, f \in \mathbb{L}_2[0,1],\ \|f\|_2 \le 1,\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \ x(k) = \int\limits_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\,dt \right\}$$

в пространстве c_0.

2.4. Исследовать ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость множества

$$1)\ S = \left\{ f \in C[0,1] \,:\, \exists\, g \in C[0,1],\ \|g\|_1 \le 1,\ \forall\, x \in [0,1]\ \ f(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt \right\},$$

$$2)\ S_2 = \left\{ f \in C[0,1] \,:\, \exists\, g \in C[0,1],\ \|g\|_2 \le 1,\ \forall\, x \in [0,1]\ \ f(x) = \int\limits_0^x g(t)\,dt \right\}$$

в пространстве $C[0,1]$.

II. Линейные нормированные, банаховы и гильбертовы пространства

§ 4: 2, 3.
§ 5: 1, 3, 4.

2.5. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывный линейный функционал. В пространстве X рассматривается бинарное отношение $\le_f$ следующего вида: для векторов $x, y \in X$

$$x \le_f y \quad \Leftrightarrow \quad \|y - x\| \le f(y - x).$$

а) Доказать, что рассматриваемое отношение $\le_f$ задаёт на X частичный порядок.

б) Пусть компакт $K \subset X$. Доказать, что в $(K, \le_f)$ существует максимальный элемент.

в) Пусть пространство $(X, \|\cdot\|)$ полное, а множество $M \subset X$ ограничено и замкнуто. Доказать, что в $(M, \leq_f)$ существует максимальный элемент.

2.6. Доказать, что в бесконечномерном банаховом пространстве не существует счётного базиса Гамеля. Привести пример линейного пространства со счётным базисом Гамеля.

2.7. В линейном пространстве ℓ_1 построить две нормы, такие, что некоторая последовательность элементов ℓ_1 является сходящейся по каждой из них к разным элементам ℓ_1. Показать, что пару норм с таким свойством можно построить на любом линейном бесконечномерном пространстве.

III. Линейные ограниченные операторы, обратный оператор

§ 6: 2; 3; 6; 13; 22.

§ 7: 5; 6; 8.

2.8. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, такие что X бесконечномерно, а Y нетривиально. Доказать, что существует неограниченный линейный оператор $A\colon X \to Y$.

2.9. Пусть X — бесконечномерное банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$.

а) Доказать, что существует такой неограниченный линейный оператор $A\colon X \to X$, что его ядро тривиально, множество значений равно X, и обратный оператор $A^{-1}\colon X \to X$ неограничен.

б) Доказать, что $\|x\|_A = \|Ax\|$, $x \in X$, является нормой в X, относительно которой оно также является банаховым пространством.

в) Можно ли показать, что одна из двух рассматриваемых нормированных топологий в X слабее другой?

IV. Компактные операторы

§ 12: 1; 7; 8; 10; 11.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов