УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Базовая часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
75 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Вывод уравнений и постановка основных краевых задач математической физики. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Характеристические поверхности. Криволинейная система координат. Приведение к каноническому виду в точке и в окрестности.

2. Формула Даламбера решения задачи Коши для уравнения малых колебаний струны. Область зависимости решения от начальных данных. Корректность постановки задачи Коши для одномерного волнового уравнения. Пример Адамара некорректной задачи Коши. Смешанная задача для полубесконечной струны. Условия согласования начальных и граничных данных.

3. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Запаздывающие потенциалы. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Принцип Гюйгенса. Единственность и непрерывная зависимость решения от правой части и начальных данных.

4. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$. Фундаментальное решение. Тепловые потенциалы. Формула Пуассона. Единственность решения задачи Коши и класс функций, ограниченных с экспоненциальным весом в каждой полосе, непрерывная зависимость от правой части и начальной функции.

5. Смешанная задача для гиперболического уравнения. Единственность решения, интеграл энергии. Метод Фурье решения смешанной задачи с начальными данными на отрезке и его обоснование. Условия согласования.

6. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Принцип максимума для неограниченной области.

7. Смешанная задача для параболического уравнения. Единственность решения. Построение решения смешанной задачи с начальными данными на отрезке методом Фурье и его обоснование. Условия согласования.

8. Постановка внутренней и внешней задач Дирихле на плоскости. Принцип максимума (нестрогий) для гармонических функций. Единственность и непрерывная зависимость решения задачи Дирихле.

9. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге. Решение задачи методом Фурье. Существование классического решения задачи Дирихле для круга в случае непрерывной граничной функции. Интеграл Пуассона.

10. Постановка внутренней задачи Неймана. Необходимое условие разрешимости. Неединственность решения.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2008.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Москва : Наука, 1988.
4. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1992.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
7. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.

Дополнительная

8. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
9. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — Москва : БИНОМ, 2005.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2004, 4-е изд., стереотип.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 07–12 октября)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определите тип уравнения

$$u_{xx} + u_{yy} + 2\alpha u_{yz} + \alpha u_{zz} = 0$$

при различных вещественных значениях α.

2. Определите тип уравнения

$$(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$$

в различных областях плоскости (x, y).

3. 2.1(2).

II. Уравнения гиперболического типа в случае двух независимых переменных. Задачи Коши и Гурса

4. Найдите общее решение уравнения

$$u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \alpha\beta u = 0, \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

5. 12.3.

6. Решите задачи Коши:

<u>а</u>) $yu_{xx} + (x + y)u_{xy} + xu_{yy} + u_x + u_y = 0, \quad y > |x|,$
$u|_{x=1} = 1, \quad u_x|_{x=1} = 1 - \frac{1}{y}, \quad y > 1;$

б) $u_{xx} + \cos x u_{xy} + (\cos x - 1)u_{yy} - \frac{\sin x}{2 - \cos x}(u_x + u_y) = 0,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
$u|_{x=0} = 3y, \quad u_x|_{x=0} = -2, \quad y \in \mathbb{R}.$

Решите задачи Коши и укажите наибольшую область, где решение определено однозначно:

<u>в</u>) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^2, \quad y < |x|,$
$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 2;$

г)* $yu_{xx} + (1 + y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{(u_x + u_y)}{1 - y} = 0, \quad y < 1,$
$u|_{y=0} = x^2 + 2x, \quad u_y|_{y=0} = -2x, \quad 0 < x < \frac{3}{2}.$
Принадлежит ли точка с координатами $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ области, в которой решение задачи определено однозначно?

7. Решите задачи Гурса:

а) 14.46;

<u>б</u>) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \quad \frac{1}{x^2} < y < x^2, \quad x > 0,$
$u|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4,$
определите максимальную область, в которой решение единственно.

8. Решите задачу
$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad -2 < x \leq 0;$
$u|_{y=x} = 5x^2 + 3x^3, \quad 0 \leq x < 1$ и определите максимальную область, в которой решение единственно.

III. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^1$

9. Для задачи Коши: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $\quad t > 0$, $\quad x \in \mathbb{R}$,
$u|_{t=0} = u_0(x)$, $\quad u_t|_{t=0} = 0$, $\quad x \in \mathbb{R}$,
где $u_0(x) = (1+\cos x)^2 \theta(\pi - |x|)$, докажите, что функция $u_0(x) \in \in C^2(\mathbb{R})$, и постройте графики граничной функции $u_0(x)$ и решения при $t = \frac{\pi}{2a}$, $t = \frac{\pi}{a}$, $t = \frac{2\pi}{a}$.

10. Решите смешанные задачи на полупрямой:

а) 21.13; 21.18;

б) $9u_{tt} = u_{xx}$, $\quad t > 0$, $\quad x > 0$,
$u|_{t=0} = 6x$, $\quad u_t|_{t=0} = 4e^{-3x} + 2$, $\quad x \geq 0$,
$u_x|_{x=0} = -6t + 6e^{-t}$, $\quad t \geq 0$;

<u>в</u>) $4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}$, $\quad x > 0$, $\quad t > 0$,
$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}$, $\quad u_t|_{t=0} = 0$, $\quad x \geq 0$,
$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8$, $\quad t \geq 0$;

г) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{2x+1}(u_x - u_t) = 0$, $\quad x > 0$, $\quad t > 0$,
$u|_{t=0} = \sin x^2$, $\quad u_t|_{t=0} = -\cos x^2$, $\quad x > 0$,
$(u - u_x)|_{x=0} = -t$, $\quad t > 0$;

<u>д</u>) $4u_{tt} = u_{xx} + t^2 \operatorname{ch} x$, $\quad x > 0$, $\quad t > 0$,
$u|_{t=0} = \operatorname{ch} x$, $\quad u_t|_{t=0} = 2x - \operatorname{sh} x$, $\quad x > 0$;
$u_x|_{x=0} = 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2}$, $\quad t > 0$,

е) 21.28(5); 21.29(5);

ж) $2xu_{tt} + (1-2x)u_{xt} - u_{xx} + \frac{2}{2x+1}(u_x - u_t) = 0$, $\quad x > 0$, $\quad t > 0$;
$u|_{t=0} = \sin x^2$, $\quad u_t|_{t=0} = -\cos x^2$, $\quad x > 0$;
$u|_{x=0} - u_x|_{x=0} = -t$, $\quad t > 0$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 02–07 декабря)

I. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

1. Решите задачи Коши:

а) 12.43(2,4,6,8); 12.44(1,8);

б) $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x - y + z)$, $\quad t > 0$, $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
$u|_{t=0} = xy^2 z$, $\quad u_t|_{t=0} = 3\cos(x - y + z)$, $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

<u>в</u>) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2 \cos(x + 2y)$, $\quad t > 0$,
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$,
$u|_{t=0} = yz^3$, $\quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}$, $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

<u>г</u>) $u_{tt} = \Delta u + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{5}{8}y^2 - \frac{3}{8}z^2\right) \operatorname{ch} t$, $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad t > 0$,
$u|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3$, $\quad u_t|_{t=0} = xe^z$, $\quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

<u>*Указание.*</u> Решение задачи $u_{tt} = \Delta u$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)\left(\operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0$
искать в виде $u(t, r) = \frac{v(t,r)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

д) $u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = e^x(y^2 + z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

е) Для задачи Коши $u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$
где $u_1(x, y, z) = \left(1 - 4\left((x-1)^2 + y^2 + z^2\right)\right)^3$ в области $(x-1)^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{4}$, и $u_1(x, y, z) = 0$ вне этой области, докажите, что функция $u_1(x, y, z) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, и для любого $t > 0$ найдите значение $u(0, 0, 0, t)$.

II. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

2. Решите задачи Коши:

а) 13.5(5,7); 13.6(3,4); 13.7(4);

<u>б</u>) $u_t = \Delta u + (\cos t - 2\sin t)e^{x+y+z}, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = \cos x \cos 2y, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

<u>в</u>) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2)\cos t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = x\cos(x + y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

г) $2u_t = \Delta u - \cos(x + y), \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{t=0} = x^2 + y^2;$

д) $u_t = \Delta u + (zx^2 - zy^2)\cos 2t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$
$u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}\sin z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

е) Найдите при каждом $t > 0$ значение $u(0, 0, t)$, решения задачи Коши
$4u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$
$u|_{t=0} = u_0(x, y)$, где $u_0(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ в области $\{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}$, и $u_0(x, y) = 0$ вне этой области.

III. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке

3. Решите смешанные задачи:

а) 20.9(1); 20.10;

<u>б</u>) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1,$
$u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad x \in [0; 1],$
$u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad t \geq 0;$

<u>в</u>) $u_t = u_{xx} - u + \frac{t(x^2-2)}{2\pi}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u|_{t=0} = \cos x, \quad x \in [0; \pi],$
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t \geq 0;$

г) $u_{tt} = u_{xx} + 80u - 80t + x\sin t, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = \sin 9x, \quad u_t\big|_{t=0} = 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2},$
$u|_{x=0} = t, \quad u_x\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad t > 0;$

д) $u_t = u_{xx} + u - 1, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u|_{t=0} = \cos\frac{x}{2} + 1, \quad x \in [0; \pi],$
$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=\pi} = 1, \quad t \geq 0;$

е) $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi,$
$u|_{t=0} = x + \cos\frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad x \in [0; \pi],$
$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$

ж)* Найдите $\lim_{t\to+\infty} u(x,t)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^1$, где $u(t,x)$ — решение задачи Коши $u_t = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$
$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) \in C(\mathbb{R}),$
$\lim_{x\to-\infty} u_0(x) = A, \quad \lim_{x\to+\infty} u_0(x) = B.$

IV. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями в прямоугольнике

4. 20.20; 20.22.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков
ст. преп. С. И. Колесникова