УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
30 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Область определения линейного оператора. Плотно определённые операторы. Симметричные операторы, свойства их собственных значений и собственных функций.
2. Симметричные линейные операторы в гильбертовом пространстве, обладающие ортогональным базисом из собственных функций. Замыкание, спектральное разложение и функциональное исчисление таких операторов.
3. Тензорное произведение двух гильбертовых пространств и построение в нём ортогонального базиса с помощью ортогональных базисов в сомножителях.
4. Оператор Лапласа в прямоугольнике Π с однородными граничными условиями Дирихле или Неймана как симметричный плотно определённый оператор в $\mathbb{L}_2(\Pi)$. Ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(\Pi)$ из его собственных функций, спектральное разложение замыкания этого оператора.
5. Начально-краевая задача в гильбертовом пространстве с замкнутым симметричным линейным оператором, обладающим ортогональным базисом из собственных функций, метод Фурье её решения.
6. Начально-краевая задача для уравнений Шрёдингера, теплопроводности и волнового, условия их разрешимости, оператор эволюции.
7. Сопряжённое гильбертово пространство, теоремы Рисса о проекции и об ортогональном дополнении, теорема Рисса—Фреше.
8. Сопряжённый оператор для линейного оператора в гильбертовом пространстве, его область определения. Теорема Фредгольма о связи множества значений линейного оператора и ядра его сопряжённого.
9. Теорема о связи графиков линейного оператора и его сопряжённого. Замкнутость сопряжённого оператора.
10. Критерий замыкаемости плотно определённого линейного оператора в гильбертовом пространстве. Замыкаемость плотно определённого симметричного оператора. Пример незамыкаемого плотно определённого оператора.
11. Формулы Грина для оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{G}) \to \mathbb{L}_2(G)$ в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей, замыкаемость этого оператора.
12. Неравенство Фридрихса для функции $f \in C^1(\overline{G})$ и выпуклой ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с кусочно–гладкой границей.
13. Задача Дирихле в круге $K \subset \mathbb{R}^2$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{K}) \to \mathbb{L}_2(K)$, существование и единственность её решения.

14. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа—Бельтрами на сфере $S \subset \mathbb{R}^3$, сферические функции. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(S)$ из сферических функций.
15. Задача Дирихле в шаре $B \subset \mathbb{R}^3$ для замыкания оператора Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$, существование и единственность её решения.
16. Самосопряжённый линейный оператор в гильбертовом пространстве, его плотная определённость, замкнутость и симметричность. Пример несамосопряжённого замкнутого плотно определённого симметричного оператора.
17. Критерий самосопряжённости замыкания плотно определённого симметричного оператора. Самосопряжённость замыкания симметричного оператора, обладающего ортогональным базисом из собсивенных функций.
18. Спектр линейного оператора в гильбертовом пространстве. Вещественность спектра самосопряжённого оператора. Критерий принадлежности вещественного числа спектру самосопряжённого оператора.
19. Непустота спектра непрерывного линейного оператора в гильбертовом пространстве. Теорема о спектральном радиусе непрерывного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве.
20. Компактные самосопряжённые операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта—Шмидта. Резольвента компактного самосопряжённого оператора.
21. Интегральные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ для компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Компактность интегрального оператора. Интегральный самосопряжённый оператор в $\mathbb{L}_2(K)$, ортогональный базис в $\mathbb{L}_2(K)$ из его собственных функций.
22. Симметричный оператор Штурма—Лиувилля и критерий его обратимости. Замыкание оператора, обратного к оператору Штурма–Лиувилля, как самосопряжённый компактный оператор. Теорема Стеклова.
23. Собственные числа и собственные функции оператора Лапласа в круговом секторе или круге при однородных граничных условиях. Функции Бесселя и свойство их ортогональности. Свойства нулей функций Бесселя.
24. Ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2(K)$ из собственных функций оператора Лапласа в круговом секторе или круге $K \subset \mathbb{R}^2$ при однородных граничных условиях.
25. Метод Фурье решения задачи о колебаниях закреплённой круглой мембраны.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2008.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, Т. 1. — Москва : Мир, 1977.
3. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики, Т. 1. — Москва : Мир, 1982.
4. Сборник задач по уравнениям математической физики / под редакцией В. С. Владимирова. — 3-е изд., исправл. — Москва : Физматлит, 2001.

Дополнительная

5. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
6. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 21–26 октября)

I. Симметричные операторы в гильбертовом пространстве

1.1. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[0,1]$ для заданного линейного оператора $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$

– доказать его симметричность,
– найти все его собственные числа,
– найти ортогональный базис в $\mathcal{H}$ из его собственных функций,
– найти область определения и спектральное разложение его замыкания $\overline{A}\colon D(\overline{A}) \to \mathcal{H}$, если:

а) $D(A) = \{\, f \in C^2[0,1] : \ f(0) = f(1) = 0 \,\}$,

$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$

б) $D(A) = \{\, f \in C^2[0,1] : \ f'(0) = f'(1) = 0 \,\}$,

$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$

в) $D(A) = \{\, f \in C^2[0,1] : \ f(0) = f'(1) = 0 \,\}$,

$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$

г) $D(A) = \{\, f \in C^2[0,1] : \ f'(0) = f(1) = 0 \,\}$,

$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$

д) $D(A) = \left\{ f \in C^1[0,1] : \ f(0) = e^{i\alpha} f(1) \right\}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$,

$(Af)(x) = if'(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A).$

1.2. Пусть прямоугольник $\Pi = [0,1] \times [0,1]$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(\Pi)$ для заданного линейного оператора $A\colon D(A) \to \mathcal{H}$

– доказать его симметричность,
– найти все его собственные числа,
– найти ортогональный базис в $\mathcal{H}$ из его собственных функций,
– найти область определения и спектральное разложение его замыкания $\overline{A}\colon D(\overline{A}) \to \mathcal{H}$, если:

а) $D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \begin{array}{ll} f(x,0) = f(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ f(0,y) = f(1,y) = 0, & y \in [0,1] \end{array} \right\}$,

$(Af)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \quad f \in D(A);$

б) $D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \begin{array}{ll} f(x,0) = f'_x(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ f'_y(0,y) = f(1,y) = 0, & y \in [0,1] \end{array} \right\}$,

$(Af)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \quad f \in D(A);$

в) $D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \begin{array}{ll} f'_x(x,0) = f'_x(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ f(0,y) = f(1,y) = 0, & y \in [0,1] \end{array} \right\}$,

$(Af)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \quad f \in D(A);$

г) $D(A) = \left\{ f \in C^1(\Pi) : \begin{array}{ll} f(x,0) = f(x,1), & x \in [0,1], \\ f(0,y) = if(1,y), & y \in [0,1] \end{array} \right\}$,

$(Af)(x) = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \quad f \in D(A);$

д) $D(A) = \left\{ f \in C^2(\Pi) : \begin{array}{ll} f'_x(x,0) = f(x,1) = 0, & x \in [0,1], \\ f(0,y) = -f(1,y), & y \in [0,1] \end{array} \right\}$,

$(Af)(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \quad f \in D(A).$

II. Начально-краевая задача в гильбертовом пространстве, метод Фурье

1.3. Решить задачи:

а) Оператора A определён в 1.1 а), функция $v \in D(\overline{A})$,

$$\begin{array}{l} i\frac{d}{dt}u(t) = \overline{A}u(t), \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{A}), \\ u(+0) = v; \end{array}$$

б) Оператора A определён в 1.1 б), функция $v \in \mathbb{L}_2[0,1]$,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) &= \overline{A}u(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= v; \end{aligned}$$

в) Оператора A определён в 1.1 в), функция $v \in D(\overline{A})$,

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) &= \overline{A}u(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= v,\\ \tfrac{d}{dt}u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

г) Оператора A определён в 1.1 г),

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) &= \overline{A}u(t)+\sin(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= 0,\\ \tfrac{d}{dt}u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

д) Оператора A определён в 1.1 д),

$$\begin{aligned} i\tfrac{d}{dt}u(t) &= -(\overline{A})^2u(t)+\exp(it), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

е) Оператора A определён в 1.2 б), функция $v \in D(\overline{A})$,

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) &= \overline{A}u(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= v,\\ \tfrac{d}{dt}u(+0) &= 0; \end{aligned}$$

ж) Оператора A определён в 1.2 г), функция $v \in \mathbb{L}_2(\varPi)$,

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}u(t) &= -(\overline{A})^2u(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= v; \end{aligned}$$

з) Оператора A определён в 1.2 д), функция $v \in D(\overline{A})$,

$$\begin{aligned} i\tfrac{d}{dt}u(t) &= \overline{A}u(t), \qquad t>0, \quad u(t)\in D(\overline{A}),\\ u(+0) &= v. \end{aligned}$$

III. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в круге и кольце

1.4. Пусть $K = \Big\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ r=\sqrt{x^2+y^2}<1 \Big\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = x^4;$$

б) Найти решение $u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = y^3;$$

в) Найти решение $u \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = -xy, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = 0;$$

г) Исследовать, при каких $a \in \mathbb{R}$ существует решение $u \in C^2(K) \cap C^1(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = x^2, \quad (x,y) \in K, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = ax^2 + y,$$

и найти это решение.

1.5. Пусть $K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < r = \sqrt{x^2+y^2} < 2 \right\}$. Найти решение $u \in C^2(K) \cap C(\overline{K})$ задачи:

$$\Delta u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in K, \quad u|_{r=1} = 1 + x^2, \quad u|_{r=2} = y^2.$$

IV. Сферические функции. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в шаре и шаровом слое

1.6. Пусть $B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} < 1 \right\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad u|_{r=1} = y - z^2;$$

б) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = x^3;$$

в) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x,y,z) = 0, \quad (x,y,z) \in B, \quad \left. u - \frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = (x+y)z.$$

1.7. Пусть $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 1 < r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} < 2 \right\}$.

а) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in B, \quad u\big|_{r=1} = 2xy, \quad u\big|_{r=2} = x^2 + z^2;$$

б) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in B, \quad u + \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=1} = xy, \quad u\big|_{r=2} = -z;$$

в) Найти решение $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ задачи:

$$\Delta u(x, y, z) = x^2 z, \quad (x, y, z) \in B, \quad u\big|_{r=1} = y^2 z, \quad u\big|_{r=2} = 0.$$

1.8. Пусть $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \right\}$. Рассматривается оператор Лапласа $\Delta\colon C^2(\overline{B}) \to \mathbb{L}_2(B)$.

а) Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\overline{\Delta} u = 0, \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(B), \quad u\big|_{\partial B} = \sin(z) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(\partial B);$$

б) Найти решение $u \in D(\overline{\Delta})$ задачи:

$$\overline{\Delta} u = 0, \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(B), \quad u\big|_{\partial B} = xy\cos(z) \quad \text{в} \quad \mathbb{L}_2(\partial B).$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 16–21 декабря)

I. Интегральные уравнения

2.1. Для интегрального оператора $A\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с конечномерным множеством значений найти все характеристические числа и найти все решения $f \in \mathcal{H}$ уравнения $f = \lambda A f + g$ для любого $g \in \mathcal{H}$ при всех значениях $\lambda \in \mathbb{C}$, если

а) оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0, 1] \to \mathbb{L}_2[0, 1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} + \left(\frac{x}{y}\right)^{1/3} \right] f(y)\, dy, \quad x \in (0, 1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0, 1];$$

б) оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,\pi] \to \mathbb{L}_2[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^\pi \cos(2x+y)\, f(y)\, dy, \quad x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi];$$

в) $\varPi = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1| < 1,\ |x_2| < 1 \right\}$, оператор $A\colon \mathbb{L}_2(\varPi) \to \mathbb{L}_2(\varPi)$ имеет вид

$$(Af)(x_1,x_2) = \iint\limits_{\varPi} (x_1x_2 + y_1y_2)\, f(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2,$$
$$(x_1,x_2) \in \varPi, \quad f \in \mathbb{L}_2(\varPi);$$

г) $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x| < 1 \right\}$, оператор $A\colon \mathbb{L}_2(B) \to \mathbb{L}_2(B)$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_B \left(\frac{|y|}{|x|} + \frac{|x|}{|y|} \right) f(y)\, dy, \quad x \in B, \quad f \in \mathbb{L}_2(B).$$

2.2. Для интегрального самосопряжённого оператора $A\colon \mathbb{L}_2\,[a,b] \to \mathbb{L}_2\,[a,b]$ найти все характеристические числа и ортогональный базис в $\mathbb{L}_2[a,b]$ из собственных функций A. Для любого числа $\lambda \in \mathbb{C}$ и любой функции $g \in \mathbb{L}_2[a,b]$ найти все решения $f \in \mathbb{L}_2[a,b]$ уравнения $f = \lambda A f + g$, если

а) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x y\, f(y)\, dy + \int\limits_x^1 x\, f(y)\, dy, \quad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

б) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x y(1-x)\, f(y)\, dy + \int\limits_x^1 x(1-y)\, f(y)\, dy,$$
$$x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

в) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x (y+1)(x-2)\, f(y)\, dy + \int\limits_x^1 (x+1)(y-2)\, f(y)\, dy,$$
$$x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

г) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,1] \to \mathbb{L}_2\,[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x x(y+1)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 y(x+1)\,f(y)\,dy,$$

$$x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1];$$

д) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[-1,1] \to \mathbb{L}_2\,[-1,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_{-1}^x (1-x)(1+y)\,f(y)\,dy + \int\limits_x^1 (1+x)(1-y)\,f(y)\,dy,$$

$$x \in [-1,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[-1,1];$$

е) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,\pi] \to \mathbb{L}_2\,[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x \cos y \sin x\,f(y)\,dy + \int\limits_x^\pi \cos x \sin y\,f(y)\,dy,$$

$$x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi];$$

ж) оператор $A\colon \mathbb{L}_2\,[0,\pi] \to \mathbb{L}_2\,[0,\pi]$ имеет вид

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x \sin y \cos x\,f(y)\,dy + \int\limits_x^\pi \cos y \sin x\,f(y)\,dy,$$

$$x \in [0,\pi], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,\pi].$$

II. Задача Штурма—Лиувилля

2.3. Для заданного оператора Штурма—Лиувилля $A\colon D(A) \to C[0,1]$ с областью определения $D(A) \subset C^2[0,1]$ доказать, что существует обратный оператор $A^{-1}\colon C[0,1] \to D(A)$, и для любой функции $g \in C[0,1]$ вычислить функцию $A^{-1}g \in D(A)$, если

а) $D(A) = \left\{\, f \in C^2[0,1] :\ f(0) = 0,\ f(1) + f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+x^2)f''(x) - 2xf'(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

б) $D(A) = \left\{\, f \in C^2[0,1] :\ f(0) - 2f'(0) = 0,\ f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+e^x)f''(x) - e^x f'(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

в) $D(A) = \left\{\, f \in C^2[0,1] :\ f'(0) = 0,\ f(1) - f'(1) = 0 \,\right\}$,

$$(Af)(x) = -(1+x^2)f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A);$$

г) $D(A) = \{\ f \in C^2[0,1] \ :\ f'(0) = 0,\ f'(1) = 0\ \}$,

$$(Af)(x) = -f''(x) - f(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(A).$$

2.4. Оператор Штурма—Лиувилля $A\colon D(A) \to C(0,1]$ с областью определения

$$D(A) = \{\ f \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1] \ :\ f'(0) = f(1) = 0\ \}$$

имеет вид

$$(Af)(x) = -\frac{f''(x)}{x^2} + \frac{2f'(x)}{x^3} - \frac{2f(x)}{x^4}, \qquad x \in (0,1], \qquad f \in D(A).$$

Доказать, что существует обратный оператор $A^{-1}\colon C[0,1] \to D(A)$, и для любой функции $g \in C[0,1]$ вычислить функцию $A^{-1}g \in D(A)$.

2.5. Оператор Штурма—Лиувилля $A\colon D(A) \to C\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ с областью определения

$$D(A) = \left\{\ f \in C^2\left(0, \tfrac{\pi}{2}\right] \cap C\left[0, \tfrac{\pi}{2}\right] \ :\ f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0\ \right\}$$

имеет вид

$$(Af)(x) = -\sin^2(x) f''(x) - \sin(2x) f'(x), \qquad x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right], \qquad f \in D(A).$$

Пусть $M = \left\{ g \in C\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ :\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|g(x)|}{x}\, dx < +\infty \right\}$. Доказать, что существует обратный оператор $A^{-1}\colon M \to D(A)$, и для любой функции $g \in M$ вычислить функцию $A^{-1}g \in D(A)$.

2.6. Пусть $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2[0,1]$. Доказать, что заданный оператор $L\colon D(L) \to \mathcal{H}$ с областью определения $D(L) \subset \mathcal{H}$ является симметричным и найти все его собственные числа и собственные функции. Доказать, что собственные функции A образуют в $\mathcal{H}$ ортогональный базис, и найти область определения и спектральное разложение оператора $\overline{L}$, если

а) $D(L) = \{\ f \in C^2[0,1] \ :\ f(0) = 0,\ f'(1) + f(1) = 0\ \}$,

$$(Lf)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(L);$$

б) $D(L) = \{\ f \in C^2[0,1] \ :\ f'(0) + f(0) = 0,\ f'(1) = 0\ \}$,

$$(Lf)(x) = f''(x), \quad x \in [0,1], \quad f \in D(L);$$

Для каждого из указанных операторов и любого $v \in \mathcal{H}$ найти решение задачи

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}u(t) = -(\overline{L})^2 u(t), \qquad t > 0, \quad u(t) \in \mathcal{H}, \\ u(+0) = v. \end{gathered}$$

III. Функции Бесселя. Смешанная задача с начальными условиями в круге и секторе

2.7. Пусть $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < R^2 \right\}$ для $R > 0$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(K)$ оператор Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathcal{H}$ с областью определения

$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) \;:\; f|_{\partial K} = 0 \right\} \subset \mathcal{H}.$$

Найти замыкание $\overline{\Delta}$ оператора Δ, указав его область определения $D(\overline{\Delta})$ и выписав спектральное разложение $\overline{\Delta}$.

а) Для функции $v(x, y) = 1 - \frac{x^2+y^2}{R^2}$ при $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$ найти решение задачи

$$\begin{gathered} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) = \overline{\Delta}u(t), \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = v, \\ \tfrac{d}{dt}u(+0) = 0. \end{gathered}$$

б) Найти решение задачи

$$\begin{gathered} \tfrac{d^2}{dt^2}u(t) = \overline{\Delta}u(t) + p_0 \sin(\omega t), \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = 0, \\ \tfrac{d}{dt}u(+0) = 0, \end{gathered}$$

если числа $p_0 > 0$ и $\omega > 0$, причём $J_0(R\omega) \neq 0$.

в) Для произвольного $T_0 > 0$ найти решение задачи

$$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt}u(t) = \overline{\Delta}u(t), \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) = T_0. \end{gathered}$$

2.8. Пусть $K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1, \;\; y > 0 \right\}$ для $R > 0$. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathbb{L}_2(K)$ оператор Лапласа $\Delta\colon D(\Delta) \to \mathcal{H}$ с областью определения

$$D(\Delta) = \left\{ f \in C^2(\overline{K}) \;:\; f|_{\partial K} = 0 \right\} \subset \mathcal{H}.$$

Найти замыкание $\overline{\Delta}$ оператора Δ, указав его область определения $D(\overline{\Delta})$ и выписав спектральное разложение $\overline{\Delta}$. Для функции $w(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

при $(x, y) \in K$ найти решение задачи

$$\begin{aligned} \tfrac{d^2}{dt^2} u(t) &= \overline{\Delta} u(t) + tw, \qquad t > 0, \quad u(t) \in D(\overline{\Delta}), \\ u(+0) &= 0, \\ \tfrac{d}{dt} u(+0) &= 0. \end{aligned}$$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов