УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория функций комплексного переменного**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 5

Трудоёмкость:
Базовая часть — 5 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 5 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 105

Самостоятельная работа:
90 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Комплексные числа. Алгебра комплексных чисел и их геометрическое представление. Последовательности и ряды. Расширенная комплексная плоскость и стереографическая проекция.
2. Комплексная дифференцируемость и условия Коши–Римана. Связность и характеристическое свойство области. Теорема о голоморфной в области функции с обращающейся в нуль производной. Теорема об обратной функции.
3. Степенные ряды и элементарные функции. Голоморфность суммы степенного ряда в круге сходимости. Свойства экспоненты и тригонометрических функций. Ветви логарифмической функции. Комплексные степени.
4. Комплексное интегрирование. Интеграл и его свойства. Первообразная и полный дифференциал в области. Условия независимости интеграла от формы пути. Лемма Гурса и теорема Коши для выпуклой области. Усиление леммы Гурса.
5. Интеграл Коши. Интегральная формула Коши для круга и бесконечная дифференцируемость голоморфной функции. Интегральная формула Коши для производных. Теоремы Морера, о среднем и Лиувилля.
6. Ряд Тейлора. Нули голоморфной функции и теорема единственности.
7. Приращение аргумента вдоль кривой. Индекс точки относительно замкнутой кривой и его свойства. Общая форма теоремы Коши и её следствия для односвязной и многосвязной областей.
8. Ряд Лорана. Изолированные особые точки. Связь их классификации с видом ряда Лорана. Теорема Сохоцкого о поведении голоморфной функции в окрестности существенно особой точки. Вычеты и формулы для их вычисления. Теорема Коши о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
9. Регулярные ветви логарифма и корней. Теорема о существовании регулярной ветви логарифма голоморфной в области функции. Теорема о существовании регулярной ветви корня голоморфной в области функции. Разложение в ряды регулярных ветвей логарифма и корня. Вычисление интегралов с использованием регулярных ветвей.
10. Принцип аргумента и отображающие свойства голоморфной функции. Теорема Руше и основная теорема алгебры. Теорема о локальной структуре отображения. Принцип сохранения области. Однолистность и локальная однолистность. Принцип максимума модуля и лемма Шварца. Конформность отображения и критерий конформности в точке. Конформность в расширенной комплексной плоскости.

11. Локально равномерная сходимость. Теоремы Вейерштрасса и Гурвица. Принцип компактности.

12. Элементарные конформные отображения. Дробно-линейные преобразования. Ангармоническое отношение четырёх точек. Круговое свойство и принцип симметрии для дробно-линейных отображений. Конформные отображения с использованием степенной и экспоненциальной функций. Функция Жуковского. Теорема Римана об отображении. Теорема о соответствии границ при конформном отображении (без доказательства).

13. Аналитическое продолжение. Теорема Коши–Адамара. Аналитическое продолжение вдоль пути и теорема о монодромии. Принцип симметрии Римана–Шварца.

14. Мероморфные функции. Теорема Миттаг–Леффлера о существовании мероморфной функции с заданными полюсами. Разложение котангенса в виде суммы элементарных дробей.

15. Бесконечные произведения. Представление синуса в виде бесконечного произведения. Формула Эйлера и представление Гаусса для гамма–функции. Интеграл Френеля.

16. Гармонические функции и задача Дирихле. Связь между голоморфными и гармоническими функциями. Принцип экстремума и теорема единственности для гармонических функций. Конформная инвариантность. Теорема о среднем и интегральная формула Пуассона. Интеграл Пуассона и решение задачи Дирихле в круге.

17. Асимптотические методы и функция Эйри. Интегральные представления и свойства функции Эйри. Метод Лапласа и асимптотика гамма–функции. Метод стационарной фазы. Метод перевала и асимптотика функции Эйри.

Литература

Основная

1. *Горяйнов В. В., Половинкин Е. С.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : МФТИ, 2017.
2. *Половинкин Е. С.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : ИНФРА-М, 2015.
3. *Шабунин М. И., Сидоров Ю. В.* Теория функций комплексного переменного. — Москва : Лаборатория знаний, 2016.

Дополнительная

4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — Санкт Петербург : Лань, 2002.
5. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — Москва : Книга по требованию, 2013.

6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч, 1, 2. — Москва : Наука, 1985; Санкт Петербург : Лань, 2004.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Шабунин М. И., Половинкин Е. С., Карлов М. И.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного — Москва : Бином, 2004.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 05 октября)

I. Комплексные числа. Стереографическая проекция

§1: 3(2); <u>4(2)</u>; 11; 18.

§2: 3.

<u>T.1</u>. Найти вещественную и мнимую части комплексных чисел:

$$\text{а) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2019}; \qquad \text{б) } (1+i)^n - (1-i)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

T.2. Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ не лежат на одной прямой. Найти выражение для центра окружности, проходящей через эти три точки.

T.3. На единичной окружности $|z| = 1$ взяты две точки a и b, $a + b \neq 0$, и через них проведены касательные к окружности. Найти точку, в которой пересекаются эти касательные.

T.4. Покажите, что при стереографической проекции окружности на сфере Римана соответствует в комплексной плоскости окружность или прямая.

T.5. Доказать, что для $z, z' \in \mathbb{C}$ величина

$$d(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |z'|^2)}}$$

выражает расстояние между прообразами этих точек при стереографической проекции.

T.6. Параметрическое уравнение прямой в комплексной плоскости можно записать в виде $z(t) = a + bt$, $-\infty < t < \infty$, где $a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. При этом направление прямой можно идентифицировать с направлением b. Покажите, что неравенство $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} < 0$ выделяет правую полуплоскость (относительно прямой), а неравенство $\operatorname{Im} \frac{z-a}{b} > 0$ выделяет левую полуплоскость.

T.7. Пусть a, b — ненулевые комплексные числа. Рассматривая их как векторы в комплексной плоскости, покажите, что $\operatorname{Re}\{\bar{a}b\}$ — их скалярное произведение, а $|\operatorname{Im}\{\bar{a}b\}|$ — площадь параллелограмма со сторонами a и b.

T.8*. Доказать, что точки z_1, z_2, z_3 являются вершинами равностороннего треугольника в том и только том случае, если выполняется условие $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1$.

II. Комплексная дифференцируемость. Голоморфные функции

§5: 9(1,3).

T.9. Найти области, в которых функция

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|, \qquad z = x + iy,$$

является голоморфной.

T.10. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, является голоморфной в области D функцией. Докажите, что $|\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|$ во всех точках области D.

T.11. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, является дифференцируемой в вещественном смысле функцией и

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Покажите, что уравнения Коши—Римана можно записать в следующем виде $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

T.12. Доказать, что если функция f определена в области D, n раз дифференцируема в комплексном смысле и $f^{(n)}(z) \equiv 0$, то f — полином.

T.13*. Доказать, что если все нули полинома $P(z)$ лежат в некоторой полуплоскости, то все нули производной $P'(z)$ лежат в той же полуплоскости.

Указание. Используйте равенство

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \ldots + \frac{1}{z-a_n},$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — нули полинома $P(z)$.

III. Степенные ряды и элементарные функции

Т.14. Найти радиусы сходимости степенных рядов:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-in}{1+in}\right)^{n^2} z^n; \qquad \text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (1+i^n)^n z^n;$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}; \qquad \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((1+i)^n + (1-i)^n\right) z^n.$$

§3: 10(3,4); 12(1); 13(1,3); 17(3,4,5).

Т.15. Найти значения $\sin i$, $\cos i$, $\operatorname{tg}(1+i)$.

Т.16. Докажите следующие соотношения:

а) $\operatorname{sh} z = -i\sin(iz), \quad \operatorname{ch} z = \cos(iz)$;

б) $\operatorname{sh} z_1 + \operatorname{sh} z_2 = 2\operatorname{sh}\frac{z_1+z_2}{2}\operatorname{ch}\frac{z_1-z_2}{2}$;

в) $\cos^{2n} z = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n} + \frac{1}{2^{2n-1}} \sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{n+k} \cos(2kz)$.

Т.17. Найти все значения 2^i, i^i, $(-1)^{2i}$.

Т.18*. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность ненулевых комплексных чисел такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L.$$

Докажите, что тогда $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.

IV. Комплексное интегрирование

Т.19. Вычислить интегралы

$$\int_{\mathbb{T}} |z-1|\,|dz|, \qquad \int_{\mathbb{T}} |z-1|\,dz,$$

где $\mathbb{T}$ – положительно ориентированная единичная окружность.

T.20*. Пусть $P(z)$ – полином, а γ_R – положительно ориентированная окружность с центром в точке a и радиуса R. Покажите, что

$$\int\limits_{\gamma_R} P(z)\, d\overline{z} = -i2\pi R^2 P'(a), \qquad d\overline{z} = dx - idy.$$

T.21. Вычислить интеграл $\int\limits_{\gamma} \cos^8 z\, dz$, где γ – полуокружность:

$$z(t) = \pi + \pi e^{it}, \quad \pi \leq t \leq 2\pi.$$

<u>T.22</u>. Доказать, что для $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} z > 0$, выполняется неравенство

$$|e^{-z} - 1| \leq |z|.$$

T.23*. Доказать, что для $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$, выполняются неравенства

$$\frac{1}{4}|z| \leq |e^z - 1| \leq \frac{7}{4}|z|.$$

T.24. Покажите, что формулу Грина можно записать в виде

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) dx dy \;=\; \frac{1}{2i} \int\limits_{\partial D} f(z) dz,$$

где $z = x + iy$, D — жорданова область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, с кусочно-гладкой границей ∂D.

V. Ряд Тейлора и теорема единственности

§7: 5; 6(2); 11(2,<u>3</u>); 12(3).

§9: <u>2(1-9)</u>; 3.

T.25. Функция f является суммой ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$. Выразить через f сумму степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \alpha_n z^n$.

T.26. Функция f является голоморфной в единичном круге и для каждой точки $x \in (-1, 1)$ на вещественном диаметре существует такое натуральное число n, что $f^{(n)}(x) = 0$. Является ли f полиномом?

VI. Изолированные особые точки. Ряд Лорана

§11: 3(4); <u>4(6)</u>; 7(3); <u>10(6)</u>.

§12: 2(7); 8(<u>3</u>,7); 17(9); 20(5).

Т.27. Пусть функция f голоморфна в проколотом единичном круге $0 < |z| < 1$ и при некоторых $A > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ выполняется неравенство $|f(z)| \le \frac{A}{|z|^\alpha}$. Определить тип изолированной особой точки $z = 0$ при различных значениях α.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 04–09 ноября)

I. Вычеты и вычисление интегралов

§13: 2(5); 3(5); <u>4(6)</u>; 5(3).
§14: 1(6); 2(3,8,<u>17</u>,24); 3(1).
§23: 1(4,8); 2(9,13,<u>20</u>).

<u>Т.1</u>. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3ix + 4}\,dx.$$

Т.2*. Пусть f – голоморфная и ограниченная в единичном круге $|z| < 1$ функция. Покажите, что для любого ζ, $|\zeta| < 1$, имеет место равенство

$$f(\zeta) \;=\; \frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z|<1} \frac{f(z)}{(1 - \overline{z}\zeta)^2}\,dxdy, \qquad z = x + iy.$$

II. Регулярные ветви многозначных функций. Разложение в ряды Тейлора и Лорана

§16: 2; 4; <u>5</u>; 7*.
§18: 9(2,<u>3</u>); <u>24</u>; 25; 27; <u>35</u>; 37*; 38*; 44*.

Т.3*. Доказать, что функция

$$F(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{z}}\,dt, \quad \mathrm{Re} z > 0,$$

является регулярной ветвью многозначной функции $\{\sqrt{\pi z}\}$. Разложить $F(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 1$ и указать радиус сходимости этого ряда.

III. Вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

§19: 8; 10; <u>24</u>; 25*; <u>42</u>; 46*; 47*.

§23: 5(<u>2</u>,4,8); 6(6,<u>7</u>,<u>8</u>); 7(<u>1</u>,7*).

IV. Принцип аргумента и теорема Руше

§15: 1(1,<u>3</u>,7,8*).

Т.4. Найти число корней многочлена $4z^6 + 4z^3 + 9z - 4$ в круге $|z| < 1$.

Т.5. Применяя теорему Руше и теорию вычетов, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{|z|=1} z^6 \left(\frac{1}{3z^4 + z + 1} \right) dz.$$

Т.6*. Доказать, что полином

$$P(z) = z^8 + az^3 + bz + c, \qquad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c > 0,$$

имеет в первом квадранте ровно два корня.

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Принцип максимума модуля

Т.1. Пусть $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$. Доказать, что если $P(z) \not\equiv z^n$, то найдется на единичной окружности точка z_0, в которой $|P(z_0)| > 1$.

<u>*Указание*</u>. Рассмотрите функции $g(z) = \frac{P(z)}{z^n}$ и $f(\xi) = g(1/\xi)$.

Т.2. Пусть $P(z)$ – полином степени n и $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |P(z)|$. Докажите, что для $0 < r_1 < r_2$ выполняется неравенство $\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geq \frac{M(r_2)}{r_2^n}$.

Т.3*. Пусть $f(z)$ – голоморфная в ограниченной области D и непрерывная в замыкании $\overline{D}$ функция. Докажите, что если $|f(z)| = R > 0$ на границе ∂D области D, то либо $f(z) \equiv \text{const}$, либо найдется точка $z_0 \in D$, в которой $f(z_0) = 0$. Останется ли верным утверждение в случае неограниченной области D?

Т.4*. Пусть $f(z)$ – голоморфная в единичном круге $\mathbb{D}$ функция и d – диаметр образа $f(\mathbb{D})$. Докажите, что тогда $|f'(0)| \leq \frac{d}{2}$. Заметим, что лемма Шварца сразу же дает оценку $|f'(0)| \leq d$.

II. Конформные отображения

§27: 4(5); 7(2); 8(2,4).

§28: 5 (рис. 28.31, 28.34, 28.38, 28.45); 10 (рис. 28.51, 28.53, 28.61); 12 (рис. 28.65); 13; 19 (рис. 28.71, 28.75, 28.80, 28.84, 28.85); 20 (рис. 28.89).

§29: 3 (рис. 29.19, 29.21).

III. Бесконечные произведения и мероморфные функции

Т.5. Докажите, что в единичном круге сходится следующее бесконечное произведение и выполняется равенство

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+z^{2^n}\right) = \frac{1}{1-z}.$$

Т.6. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Указание. Используйте коэффициент при нулевой степени в разложении в ряд Лорана функции $\pi^2/\sin^2\pi z$ в окрестности нуля.

Т.7*. Докажите, что при $\operatorname{Re} z > 0$ выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} e^{(1-z)t}\frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Указание. Проверить, что при $\operatorname{Re} z > 0$ и $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} te^{-(z+n)t}dt = \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Т.8*. Докажите, что

$$\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}dt = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^{\infty}\frac{t}{e^t+1}dt = \frac{\pi^2}{12}.$$

IV. Задача Дирихле

Т.9. Решить задачу Дирихле в единичном круге с заданным граничным условием:

а) $\Delta u = 0$, $u(e^{i\theta}) = \frac{\sin\theta}{5+4\cos\theta}$;

б) $\Delta u = 0$, $u(e^{i\theta}) = \frac{4+5\cos\theta}{(5+4\cos\theta)^2}$.

T.10*. Используя технику конформного отображения, найти ограниченную гармоническую функцию $u(z)$, $|z| < 1$, которая принимает значение 1 на верхней полуокружности $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z > 0$, и принимает значение 0 на нижней полуокружности $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z < 0$.

V. Асимптотические методы

T.11. Найти главный член асимптотики при $\lambda \to \infty$ функции Бесселя n-го порядка, $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\lambda \sin t - nt) dt.$$

T.12*. Найти главный член асимптотики при $\lambda \to \infty$ интеграла

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t - t^4/4} dt.$$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов