УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению
подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Базовая часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема об обратной функции. Криволинейные координаты. Теорема о неявной функции.
2. Локальные экстремумы функций многих переменных. Необходимое условие локального экстремума, достаточное условие. Условные экстремумы. Необходимое условие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.
3. Методы вычисления кратных интегралов. Теорема Фубини. Замена переменных в кратном интеграле.
4. Локальное строение гладкой кривой в $\mathbb{R}^3$. Кривизна и кручение. Формулы Френе. Дифференциальные 1-формы. Интеграл от 1-форм вдоль кусочно-гладких кривых. Формула Ньютона–Лейбница.
5. Гладкие многообразия, вложенные в $\mathbb{R}^n$. Карты и атлас. Край многообразия. Задание многообразий уравнениями и неравенствами. Гладкие функции на многообразии. Касательный вектор и касательное пространство к гладкому многообразию. Ориентация гладкого многообразия. Индуцированная ориентация края. Примеры. Абстрактные многообразия.
6. Дифференциальные k-формы в $\mathbb{R}^n$ и операции над ними. Координатное представление. Внешнее произведение и его свойства. Дифференцирование k-форм. Операция переноса.
7. Лемма о разбиении единицы. Интеграл дифференциальной формы по ориентированному многообразию.
8. Общая формула Стокса. Частные случаи формулы Стокса в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$.
9. Замкнутые и точные дифференциальные формы.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011 https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki
2. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

3. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.
4. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.
6. *Tu L.* An introduction to manifolds, Springer-Verlag, New York, 2011.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Гладкие отображения и неявные функции

Т.1. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?
б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?
в) Сколько непрерывных функций $y : [1; 2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

§3: 61(2); 64(1); 77; 103(1).
§4: 43(6).

Т.2. Рассмотрим уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — множество таких $(a_1, \ldots, a_n)$, что уравнение имеет n различных вещественных корней $x_1, \ldots, x_n$. Докажите, что для каждой точки $a \in U$ найдется окрестность, в которой $x_i = x_i(a_1, \ldots, a_n)$, причем зависимость от коэффициентов a_i гладкая. Докажите, что U является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Т.3. Докажите, что открытый круг на плоскости $\{x^2 + y^2 < 1\}$ диффеоморфен всей плоскости.

Т.4. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки p, а дифференциалы функций $f_2, \ldots, f_k$ линейно независимы в p, то в некоторой окрестности точки p функция f_1 выражается через остальные.

§3: 85(5); 88(2).
§4: 51(1); 52(4); 54*.

II. Экстремумы функций многих переменных
§5: 7(4); 9; <u>10</u>; 14(3); 18(2).
§5: 21(2); 25(8); 31(4); 35; 36*.

Т.5. Пусть U — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и функция f дифференцируема на U и непрерывна на замыкании $\overline{U}$, причем $f(x) = 0$ для всех $x \in \overline{U} \setminus U$. Покажите, что найдется точка $a \in U$, такая что $\mathrm{grad} f(a) = 0$ (аналог теоремы Ролля).

III. Сведение кратного интеграла к интегралам в пространствах меньшей размерности
§8: 80(1); 83(5); 85(1); 90(3); 133(3); 135(1); 175(5), <u>176(1)</u>.

IV. Кратные интегралы в криволинейных координатах
§8: 102(6); 107(3); <u>110(3)</u>; 123(4); 124(2); 144(<u>1</u>,6); 146(3); 148(2).
§9: 13(3); 15(4); 16(3); 19(6); 21; 63(4)*.

(45+3*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Кусочно-гладкие кривые и интегралы по ним
§10: 4; <u>17</u>; 81(2); 82(2).

Т.1. Для параметризованной кривой $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$, выпишите

а) репер Френе;

б) уравнение соприкасающейся плоскости в точке $M(1; 0; 1)$;

в) натуральную параметризацию (приняв M за начальную точку).

Т.2*. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\, ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π.

II. Многообразия

T.3. Проверьте по определению, является ли следующее множество многообразием или многообразием с краем:

а) окружность $\{x^2 + y^2 = 1\}$;

б) пара пересекающихся прямых $\{x^2 - y^2 = 0\}$;

в) полусфера $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}$.

T.4. Постройте координатный атлас на сфере $S^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, состоящий из двух карт.

T.5. Докажите, что $SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : ad - bc = 1 \right\}$ является многообразием. Найдите касательное пространство к $SL(2,\mathbb{R})$ в точке $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

T.6*. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они задают две разные гладкие структуры на прямой и приведите пример, когда одна и та же функция является гладкой функцией относительно одной гладкой структуры и не является гладкой функцией относительно другой.

III. Дифференциальные формы

T.7. Покажите, что если k нечетно, то для k-формы ω выполнено $\omega \wedge \omega = 0$. Приведите пример такой 2-формы в $\mathbb{R}^4$, что $\omega \wedge \omega \neq 0$.

T.8. Найдите значение формы $\omega = x^2 y dx \wedge dy - xz dy \wedge dz$ на векторах $(4, 0, -1)$ и $(3, 1, 2)$ в точке $(1, 2, 3)$.

T.9. Запишите дифференциальные формы $\omega_1 = dx \wedge dy \wedge dz$ и $\omega_2 = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

а) в цилиндрических координатах;

б) в сферических координатах.

T.10. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Найдите $\varphi^* \left(\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \right)$.

T.11. Вычислите внешний дифференциал следующих дифференциальных форм в $\mathbb{R}^3$:

а) $(z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2) dz$;

б) $x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$;

в) $x^2 y dx \wedge dy + y^2 z dy \wedge dz$.

T.12. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму является:

а) замкнутой формой;

б) точной формой.

IV. Интегралы дифференциальных форм и формула Стокса

§10: 40; 67; 46; 103(6); 104(3)*.
§11: 31(1); 38; 41; 42.
§11: 47(1); 52(3); 54; 63(1); 65(2); 58*.

T.13. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки. Докажите, что форма $\omega = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ замкнута на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, но не имеет там первообразной.

T.14. Найдите $\alpha \in \mathbb{R}$, при которых форма

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$

замкнута на $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Является ли ω точной (при таких α)?

T.15*. Пусть на многообразии существует невырожденная 2-форма. Докажите, что многообразие ориентируемо.

T.16*. Покажите, что ограничение формы $\omega = \frac{xdy-ydx}{z^2}$ на любой конус с центром в начале координат является замкнутой формой.

V. Площади поверхностей и интегралы по ним

§9: 30; 35; 50; 51.
§11: 7(1); 14.

VI. Градиент, ротор, дивергенция

§12: 13; 15(1,3,5); 38(1,3); 40(1); 42(2); 49(3,5,6) (в координатах проверять не обязательно); 50(4).

(47+6*)

Задания составили: к. ф.-м. н., ассистент О. А. Загрядский
к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов