УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
60 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., проф. Г. Е. Иванов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображения.

2. Безусловный экстремум функций нескольких переменных: необходимые и достаточные условия. Условный экстремум функций нескольких переменных: метод Лагранжа, необходимые и достаточные условия.

3. Методы вычисления кратных интегралов. Выражение меры множества через интеграл от меры сечений множества. Теорема Фубини о сведении кратного интеграла к повторному. Разбиение единицы. Существование гладкого разбиения единицы, подчиненного заданному открытому покрытию компакта. Выражение меры образа множества через интеграл от модуля якобиана отображения. Теорема о замене переменных в кратном интеграле.

4. Криволинейные интегралы первого и второго родов: независимость от параметризации, зависимость от ориентации кривой. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования и существование потенциала.

5. Криволинейные системы координат. Инвариантность внутренности, замыкания и границы множества относительно замены координат. Гомеоморфизмы. Понятие многообразия, вложенного в евклидово пространство. Карта и атлас. Край многообразия. Инвариантность размерности и края многообразия при гомеоморфизме. Гладкие многообразия, вложенные в евклидово пространство. Примеры гладких многообразий: многообразия, заданные системой уравнений или неравенством. Касательный вектор и касательное пространство к гладкому многообразию, вложенному в евклидово пространство. Производная гладкой функции по касательному вектору.

6. Общее (абстрактное) определение гладкого многобразия. Гладкие отображения и диффеоморфизмы гладких многообразий. Касательный вектор и касательное пространство для абстрактного многообразия, градиент гладкой функции. Изменение координат векторов и ковекторов при замене локальной системы координат на многообразии. Ориентация гладкого многообразия.

7. Тензоры как полилинейные функции, внешние формы. Тензорное поле на многообразии. Изменение компонент тензорного поля при замене локальной системы координат на многообразии. Дифференциальные формы и их координатные представления. Внешнее умножение дифференци-

альных форм. Внешний дифференциал, правило Лейбница. Дифференциальные формы на подмногообразии. Прямой перенос касательных векторов и обратный перенос дифференциальных форм при гладких отображениях многообразий.

8. Существование гладкого разбиения единицы, подчиненного заданному открытому покрытию глакого многообразия. Интеграл дифференциальной формы по гладкому многообразию. Инвариантность интеграла формы при отображениях, равных тождественному за пределами некоторого компакта. Общая формула Стокса. Формулы Грина и Гаусса–Остроградского. Оператор Гамильтона. Ротор и дивергенция векторного поля, их геометрический смысл. Замкнутые и точные дифференциальные формы, оператор гомотопии для обратных образов дифференциальных форм, локальная точность замкнутой формы. Понятие о когомологиях де Рама.
9. Риманова метрика на гладком многообразии. Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Главные, средняя и гауссовы кривизны поверхности. Риманов объем и площадь поверхности по Минковскому. Поверхностный интеграл первого рода. Полуримановы (индефинитные) метрики, пространство Минковского, метрика Шварцшильда.
10. Скобки Ли векторных полей, тождество Якоби. Операция внутреннего умножения дифференциальной формы на векторное поле. Производная Ли тензорного поля T по векторному полю $\vec{v}$ как производная переноса тензорного поля T вдоль интегральных траекторий векторного поля $\vec{v}$. Формула вычисления координат производной Ли, правило Лейбница, тождество Картана.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011 https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.

Дополнительная

3. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf
4. *Мищенко А. С., Фоменко А. Т.* Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии. — Москва : Физматлит, 2004.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. Функции нескольких переменных: учебное пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 5 октября)

I. Гладкие отображения и неявные функции

<u>Т.1</u>. Дано уравнение $y^2 = x^4$

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

г) Сколько непрерывных функций $y : [1, 2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

§3: 65; <u>77</u>; 82(1)*; 103(1).
§4: 42(1); 44(3).

Т.2. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y, \end{cases}$$

показать, что якобиан отображения отличен от нуля всюду в $\mathbb{R}^2$, но отображение не является взаимно однозначным. Каково множество значений f?

<u>Т.3</u>. Докажите, что открытый круг на плоскости $\{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$ диффеоморфен всей плоскости.

Т.4. Диффеоморфны ли открытый круг $\{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$ и открытый квадрат $\{(x, y) : \ |x| < 1, \ |y| < 1\}$ на плоскости?

<u>T.5</u>. Докажите, что если дифференциалы гладких функций $f_1, \ldots, f_k$ линейно зависимы в окрестности точки P, а дифференциалы функций $f_2, \ldots, f_k$ линейно независимы в P, то в некоторой окрестности точки P функция f_1 выражается через остальные.

T.6. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$\begin{cases} y_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, \\ y_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2. \end{cases}$$

В некоторой окрестности точки $(1, 1)$ представьте f в виде суперпозиции $h \circ g$ двух диффеоморфизмов открытых множеств, где диффеоморфизм g меняет лишь первую координату, а диффеоморфизм h – лишь вторую координату.

§3: 86; <u>90</u>; 91.
§4: 51(1); <u>52(1)</u>; 57(6)*.

II. Экстремумы функций нескольких переменных

§5: <u>2(2)</u>; 7(2); 9; 10*; 11*; 14(1); 18(1); 35*.
§5: 21(2); <u>22(1)</u>; <u>25(8)</u>; 31(<u>3</u>,4); 36*.

T.7. Является ли точка $(0, 0, 0)$ точкой локального экстремума функции $f(x, y, z) = y+z+3x^2-y^2$ при ограничении $\sin(x+y+z) = x \operatorname{ch}(y+z)+2z^2$?

III. Кратные интегралы

§8: 80(3); <u>83(6)</u>; 85(2); 94(3)*; 133(<u>4</u>, 5*); 135(1); 175(5)*; <u>176(1)</u>.
§9: 13(2).
§8: 100(6); <u>103(1)</u>; <u>110(3)</u>; 123(1); <u>124(4)</u>.

T.8. В интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z)\, dz$$

а) перейдите к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ и расставьте пределы интегрирования в порядках (φ, r, z) и (z, r, φ);

б) перейдите к сферическим координатам $x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$, $z = r\sin\theta$ и расставьте пределы интегрирования в порядке (φ, θ, r).

§8: 144(<u>3</u>,6); 146(1); 148(1).
§9: 10; 6(2)*; 15(5); 16(5); 19(7); <u>21</u>; 63(4).

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	Т.1. **§3:** 65; $\underline{77}$; 82(1)*; 103(1). **§4:** 42(1); 44(3). Т.2–Т.6.
2 неделя	**§3:** 86; $\underline{90}$; 91. **§4:** 51(1); $\underline{52(1)}$; 57(6)*. **§5:** $\underline{2(2)}$; 7(2); 9; 10*; 11*; 14(1); 18(1); 35*.
3 неделя	**§5:** 21(2); $\underline{22(1)}$; $\underline{25(8)}$; 31($\underline{3}$,4); 36*. Т.7. **§8:** 80(3); $\underline{83(6)}$; 85(2); 94(3)*; 133($\underline{4}$, 5*); 135(1); 175(5)*; $\underline{176(1)}$. **§9:** 13(2).
4 неделя	**§8:** 100(6); $\underline{103(1)}$; $\underline{110(3)}$; 123(1); $\underline{124(4)}$. Т.8. **§8:** 144($\underline{3}$,6); 146(1); 148(1). **§9:** 10; 6(2)*; 15(5); 16(5); 19(7); $\underline{21}$; 63(4).

$\boxed{50+10^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–9 ноября)

I. Интегралы по кривым

§10: 1(3); 82(3); 85(4); $\underline{17}$; 26(6); $\underline{40}$; 65; 111(1).

II. Многообразия и криволинейные системы координат

$\underline{\text{Т.1}}$. Среди множеств $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $[0,1]$ и $[0,1)$ найдите все попарно гомеоморфные и обоснуйте, что остальные пары множеств не гомеоморфны.

Т.2*. Пусть отображение $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ задано координатными функциями

$$\left(\frac{2x}{x^2+y^2+1},\ \frac{2y}{x^2+y^2+1},\ \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}\right), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Найдите образ плоскости $\mathbb{R}^2$ при отображении f. Является ли f гомеоморфизмом множеств $\mathbb{R}^2$ и $f(\mathbb{R}^2)$? Выясните геометрический смысл отображения f.

$\underline{\text{Т.3}}$. Докажите, что n-мерная сфера S^n, задаваемая в $\mathbb{R}^{n+1}$ уравнением $x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1$, является гладким многообразием. Постройте на S^n

атлас, состоящий из двух гладких карт. Существует ли гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{n+1}$, краем которого является S^n?

T.4. Пусть $a \in (0,1)$. Докажите, что тор

$$T^2 = \left\{ \begin{pmatrix} (1 + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (1 + a\cos\psi)\sin\varphi \\ a\sin\psi \end{pmatrix} : \ \varphi \in [0, 2\pi), \ \psi \in [-\pi, \pi) \right\}$$

является гладким двумерным многообразием, вложенным в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что тор T^2 гомеоморфен декартовому произведению двух окружностей $S^1 \times S^1$. Постройте на T^2 атлас, состоящий из трех гладких карт, район действия каждой из которых гомеоморфен открытому кругу $\{(x, y) : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

T.5*. Рассмотрите на $\mathbb{R}^1$ две карты $\varphi_A : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_A(x) = x$ и $\varphi_B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi_B(x) = x^3$. Проверьте, что они задают две разные гладкие структуры на прямой и приведите пример, когда одна и та же функция является гладкой функцией относительно одной гладкой структуры и не является гладкой функцией относительно другой.

T.6. Найдите касательное пространство к многообразию

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : ad - bc = 1 \right\} \text{ в точке } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>T.7</u>. Найдите образы касательных векторов $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ к области $U = \{(r, \varphi) : : r > 0, \ \varphi \in \mathbb{R}\}$ в точке $P \in U$ при отображении

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

а) геометрическим способом;

б) используя формулы изменения координат касательного вектора при замене системы координат;

в) рассмотрев результат действия соответствующих операторов дифференцирования на гладкие функции.

T.8. В окрестности точки $P = (1, 1, 1)$ многообразие $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : : x^2 + y^2 + z^2 = 3\}$ задано тремя различными картами $(\psi_k, U(P))$, где $U(P)$ – окрестность точки P относительно M,

$$\psi_1(x, y) = \left(x, y, \sqrt{3 - x^2 - y^2}\right),$$

$\psi_2(\theta,\varphi) = \big(\sqrt{3}\cos\theta\cos\varphi, \sqrt{3}\cos\theta\sin\varphi, \sqrt{3}\sin\theta\big)$,
$\psi_3(r,\gamma) = (r\cos\gamma, r\sin\gamma, \sqrt{3-r^2})$.
Пусть (α,β) – координаты касательного вектора $\vec{v}\in T_P(M)$ в ЛСК (x,y). Найдите координаты $\vec{v}$ в ЛСК (θ,φ) и в ЛСК (r,γ).

Т.9. Пусть $a\in(0,1)$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\mathrm{Meb}_k = \left\{ \begin{pmatrix} (1+u\cos\frac{k\varphi}{2})\cos\varphi \\ (1+u\cos\frac{k\varphi}{2})\sin\varphi \\ u\sin\frac{k\varphi}{2} \end{pmatrix} :\ \varphi\in[0,2\pi),\ u\in[-a,a] \right\}.$$

а) Постройте на Meb_k атлас, состоящий из двух гладких карт. При каких k многообразие Meb_k ориентируемо?
б) Найдите вектор единичной нормали к Meb_k в каждой точке Meb_k. При каких k существует непрерывное поле единичных нормалей на Meb_k?
в)* Найдите край $\partial\mathrm{Meb}_k$ многообразия Meb_k. При каких k многообразие $\partial\mathrm{Meb}_k$ является связным?

III. Дифференциальные формы

Т.10. Докажите, что если векторы $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q\in V$ линейно зависимы, то $T[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]=0$ для любой внешней формы $T\in\Lambda^q(V)$.

Т.11*. Докажите, что если $q=1$ и внешние формы $T_1,\ldots,T_k\in\Lambda^q(V)$ линейно зависимы, то $T_1\wedge\ldots\wedge T_k=0$. Верно ли это утверждение при $q=2$?

Т.12. Запишите дифференциальные формы $\omega_1 = f(x^2+y^2)(xdx-ydy)$ и $\omega_2=\sin(x^2+y^2)\,dx\wedge dy$ в полярных координатах.

Т.13. Запишите дифференциальные формы $\omega_1 = xdx+ydy+zdz$,
$\omega_2 = xdy\wedge dz + ydz\wedge dx + zdx\wedge dy$ и $\omega_3 = dx\wedge dy\wedge dz$
а) в цилиндрических координатах;
б) в сферических координатах.

Т.14. Пусть отображение $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задано формулами

$$y^1 = x^2x^3, \qquad y^2 = x^3x^1, \qquad y^3 = x^1x^2.$$

Вычислите обратные переносы $\varphi^*\omega_k$ дифференциальных форм $\omega_1 = dy^1+dy^2+dy^3$, $\omega_2 = dy^2\wedge dy^3 + dy^3\wedge dy^1 + dy^1\wedge dy^2$ и $\omega_3 = dy^1\wedge dy^2\wedge dy^3$.

Т.15. Вычислите внешние дифференциалы следующих дифференциальных форм

а) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz$;
б) $\frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$;
в) $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$, где f — гладкая функция одной переменной;
г) fdg, где $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции;
д)* $(f \circ g)dg$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкие функции.

IV. Интегралы дифференциальных форм

Т.16. Пусть двумерное гладкое многообразие $M \subset \mathbb{R}^3$ задано одной гладкой картой (ψ, M), где

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D, \qquad M = \psi(D),$$

D – компактное гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^2_{uv}$, ориентации M и D соответствуют системе координат (u,v). Пусть $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$, где P, Q, R – гладкие функции на M. Докажите, что

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

Т.17. Пусть многообразие M является графиком гладкой функции $z : D \to \mathbb{R}$, где D – компактное гладкое двумерное многообразие в $\mathbb{R}^2_{xy}$, и ориентации M и D соответствуют системе координат (x,y). Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ – гладкая функция. Докажите, что

а) $\int\limits_M f(x,y,z)\,dx \wedge dy = \int\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dx \wedge dy$;
б) $\int\limits_M f(x,y,z)\,dy \wedge dz = -\int\limits_D f(x,y,z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}\,dx \wedge dy$.

§11: 31(1); 38; 40.

V. Формула Грина

§10: 46; 101(6); 104(1)*.

Т.18. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

VI. Формулы Гаусса–Остроградского и Стокса

§11: <u>45(3)</u>; 47(2); 52(3); 54; <u>63(1)</u>; 65(1); 68*.

VII. Первообразные дифференциальных форм

T.19. Докажите, что дифференциальная форма $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ замкнута на $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, но не имеет первообразной на $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

T.20*. Пусть гладкая кривая на плоскости замкнута и имеет всюду ненулевую скорость. Докажите, что интеграл кривизны (взятой со знаком)

$$\int_\gamma k(s)\,ds$$

по натуральному параметру является целым числом, умноженным на 2π.

<u>T.21</u>. Найдите $\alpha\in\mathbb{R}$, при котором дифференциальная форма

$$\omega=(x^2+y^2+z^2)^\alpha(xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy)$$

замкнута на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Точна ли ω при этом α

а) на $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$;
б) на $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z>0\}$?

T.22*. Является ли дифференциальная форма

$$\omega=\frac{(x+z)dy-ydx-ydz}{(x+z)^2+y^2}$$

замкнутой и является ли она точной на

а) $M_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+z\neq 0,\ y\neq 0,\ x>0\}$;
б) $M_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+z>0\}$?

T.23. Докажите, что внешнее произведение замкнутой формы на точную форму — точная форма.

T.24*. Докажите, что любая дифференциальная форма степени n на $\mathbb{R}^n$ точна.

VIII. Градиент, ротор, дивергенция

§12: 13; 15(1,3,<u>5</u>,<u>8</u>); 38(1,3); 39; 40(1); <u>42(2)</u>; 49(3,<u>5</u>,6) (в координатах проверять не обязательно); 50(4).

T.25*. Найдите выражение оператора Лапласа функции в сферических координатах в $\mathbb{R}^3$.

<u>Т.26</u>. Докажите для гладкого векторного поля $\vec{v}$ на $\mathbb{R}^3$, что если $\mathrm{rot}\vec{v} = 0$ на всём $\mathbb{R}^3$, то $\vec{v} = \mathrm{grad} f$, для некоторой функции f.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**§10:** 1(3); 82(3); 85(4); <u>17</u>; 26(6); <u>40</u>; 65; 111(1). Т.1–Т.9.
2 неделя	Т.10–Т.17. **§11:** 31(1); 38; 40.
3 неделя	**§10:** 46; 101(6); 104(1)*. Т.18. **§11:** <u>45(3)</u>; 47(2); 52(3); 54; <u>63(1)</u>; 65(1); 68*.
4 неделя	Т.19–Т.24. **§12:** 13; 15(1,3,<u>5</u>,<u>8</u>); 38(1,3); 39; 40(1); <u>42(2)</u>; 49(3,<u>5</u>,6). Т.25–Т.26.

$\boxed{51 + 8^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 2–7 декабря)

I. Риманова метрика и риманов объём

<u>Т.1</u>. Для геликоида

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = av, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

1) найдите первую квадратичную форму поверхности;
2) найдите углы криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых $u = \pm av$, $v = 1$;
3) найдите длины сторон и площадь этого криволинейного треугольника;
4) найдите вторую квадратичную форму поверхности;
5) найдите кривизну нормального сечения в точке P с координатами (u_0, v_0), касающегося вектора с координатами $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ в системе координат (u,v);
6) найдите главные кривизны и главные направления;
7) найдите гауссову и среднюю кривизны.

Т.2. Для псевдосферы Бельтрами

$$x = \sin u\cos v,\ y = \sin u\sin v,\ z = \ln\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} + \cos u, \quad u \in (0,\pi),\ v \in [0, 2\pi)$$

1) найдите первую и вторую квадратичные формы;
2) найдите длины кривых $\{(u, v_0):\ u \in [u_1, u_2]\}$ и $\{(u_0, v):\ v \in [v_1, v_2]\}$;
3) найдите главные кривизны и главные направления;
4) найдите гауссову и среднюю кривизны.

T.3. Найдите уравнение локсодромы (кривой, пересекающей все меридианы под постоянным углом) на двумерной сфере в $\mathbb{R}^3$.

II. Риманов объём и интеграл по нему

§9: 34; 40; 51.

<u>T.4</u>. Вычислить площадь части сферы, заключенной между двумя параллельными плоскостями.

T.5*. Найдите площадь двуугольника с углом $\alpha \in (0, 2\pi)$ на единичной сфере

$$x = \cos\theta\cos\varphi,\ y = \cos\theta\sin\varphi,\ z = \sin\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \varphi \in [\varphi_0, \varphi_0 + \alpha].$$

Докажите, что на единичной двумерной сфере сферический треугольник с внутренними углами α, β, γ имеет площадь

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

§11: 7(1); 14; <u>18(1)</u>.

<u>T.6</u>. Найдите риманову площадь двумерного тора в $\mathbb{R}^4$, заданного уравнениями

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2, \quad x_3^2 + x_4^2 = b^2.$$

T.7. Найдите риманов объём трёхмерного симплекса в $\mathbb{R}^4$, заданного как

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

<u>T.8</u>. Найдите риманову площадь $\mathbb{R}^2$ с метрикой

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

T.9*. Найдите риманов объём $\mathbb{R}^3$ с метрикой

$$g = \frac{dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

T.10*. Найдите риманов объём части единичной сферы S^3 в $\mathbb{R}^4$, заданной неравенством
$$x_1^2 + x_2^2 \le a^2, \quad a \in (0,1].$$

T.11. Найдите метрику Пуанкаре, т.е. риманову метрику на гиперболоиде
$$x = \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \quad y = \frac{2v}{1-u^2-v^2}, \quad t = \frac{1+u^2+v^2}{1-u^2-v^2}, \quad u^2+v^2<1,$$
индуцированную псевдоевклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3_1$
$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dt \otimes dt.$$
Найдите в метрике Пуанкаре расстояние от $(0,0)$ до (u,v). Найдите длину (в метрике Пуанкаре) окружности радиуса r (в метрике Пуанкаре) с центром в $(0,0)$.

T.12. Найдите метрику g_S на двумерной сфере
$$x = \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta, \quad \theta \in [0,\pi],\ \varphi \in [0,2\pi),$$
индуцированную евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$ и метрику g_H на гиперболоиде
$$x = \operatorname{sh}\theta\cos\varphi, \quad y = \operatorname{sh}\theta\sin\varphi, \quad z = \operatorname{ch}\theta, \quad \theta \ge 0,\ \varphi \in [0,2\pi),$$
индуцированную псевдоевклидовой метрикой $g = dx\otimes dx + dy\otimes dy - dz\otimes dz$ в $\mathbb{R}^3_1$. Найдите в той и другой метриках длину «радиальной» кривой $\{(\theta,\varphi_0) : \ \theta \in [0,\theta_0]\}$ и риманов объем ε-окрестности точки $(0,0)$, т.е. множества $\{(\theta,\varphi_0) : \ \theta \in [0,\varepsilon],\ \varphi \in [0,2\pi)\}$.

T.13. Как изменится псевдоевклидова метрика
$$g = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz - dt \otimes dt$$
при преобразовании Лоренца:
$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' - vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad |v| < 1\ ?$$

T.14*. Определите поведение радиальных световых лучей (т.е. кривых

$(r(t), \theta_0, \varphi_0, t)$, касательные векторы $\vec{v}$ которых удовлетворяют уравнению $g[\vec{v}, \vec{v}] = 0$) в метрике Шварцшильда:

$$g = \frac{r}{r-\rho} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi) - \frac{r-\rho}{r} dt \otimes dt.$$

III. Скобка Ли, производная Ли, внутреннее умножение

<u>Т.15</u>. Пусть $\vec{u}, \vec{v}$ — векторные поля, f, g — гладкие функции. Докажите формулу

$$[f\vec{u}, g\vec{v}] = fg[\vec{u}, \vec{v}] - g\vec{v}(f)\vec{u} + f\vec{u}(g)\vec{v},$$

где $[f\vec{u}, g\vec{v}]$ и $[\vec{u}, \vec{v}]$ – скобки Ли; $\vec{v}(f)$, $\vec{u}(g)$ – производные функций f и g по векторным полям $\vec{v}$ и $\vec{u}$.

<u>Т.16</u>. Постройте интегральные траектории векторных полей $\vec{u}$, $\vec{v}$ и интегральные траектории их скобки Ли $\vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}]$, если

а) $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\vec{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$;

б) $\vec{u} = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, $\vec{v} = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

Существует ли в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ система координат (α, β) такая, что в этой окрестности $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial \beta}$.

<u>Т.17</u>. Найдите внутреннее произведение $i_{\vec{v}}\, dx \wedge dy \wedge dz$, если

$\vec{v} = v^x\frac{\partial}{\partial x} + v^y\frac{\partial}{\partial y} + v^z\frac{\partial}{\partial z}$.

Т.18. Найдите векторное поле $\vec{v}$ такое, что $i_{\vec{v}}(dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4) = x^1dx^1 + x^3dx^3$.

Т.19. Докажите, что для внутреннего умножения векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на дифференциальную форму ω выполняется равенство

$$i_{\vec{u}}i_{\vec{v}}\omega + i_{\vec{v}}i_{\vec{u}}\omega = 0.$$

Т.20. Вычислите производную Ли $L_{\vec{v}}\,\omega$, если

1) $\omega = \sum\limits_i \omega_i\, dx^i$, $\quad \vec{v} = \sum\limits_j v^j\frac{\partial}{\partial x^j}$, где ω_i и v^j – гладкие функции;

<u>2)</u> $\omega = z\, dx \wedge dy$, $\quad \vec{v} = x\frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial x}$

а) с помощью формулы для компонент производной Ли тензороного поля;

б) с помощью правила Лейбница;

в) с помощью тождества Картана $L_{\vec{v}} = d\, i_{\vec{v}} + i_{\vec{v}}\, d$.

Т.21. Докажите тождество для дифференциальной формы первой степени ω и векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$

$$(d\omega)[\vec{u},\vec{v}] = \vec{u}(\omega[\vec{v}]) - \vec{v}(\omega[\vec{u}]) - \omega[[\vec{u},\vec{v}]],$$

где $(d\omega)[\vec{u},\vec{v}]$ – значение дифференциальной формы $d\omega$ на паре векторов $\vec{u},\vec{v}$; $\vec{u}(\omega[\vec{v}])$ и $\vec{v}(\omega[\vec{u}])$ – производные функций $\omega[\vec{v}]$ и $\omega[\vec{u}]$ по векторным полям $\vec{u}$ и $\vec{v}$; $\omega[[\vec{u},\vec{v}]]$ – значение дифференциальной формы ω на скобке Ли $[\vec{u},\vec{v}]$.

<u>Т.22</u>. Пусть на гладком ориентируемом n-мерном многообразии M задана дифференциальная форма объема $\omega \in \Omega^n(M)$ с компактным носителем. Определим дивергенцию векторного поля $\vec{v}$ как $(\operatorname{div}\vec{v}\,)\,\omega = L_{\vec{v}}\,\omega$. Выразите интеграл

$$\int_M (\operatorname{div}\vec{v}\,)\,\omega$$

через интеграл по краю $\partial\omega$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя		Т.1–Т.3.
	§9:	34; 40; 51.
		Т.4, Т.5.
	§11:	7(1); 14; <u>18(1)</u>.
2 неделя		Т.6–Т.14.
3 неделя		Т.15–Т.22.

$\boxed{24 + 4^*}$

Задания составили: к. ф.-м. н., ассистент О. А. Загрядский
д. ф.-м. н., проф. Г. Е. Иванов