УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Кратные интегралы и теория поля**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ФЭФМ, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа: 90 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
д. ф.-м. н., профессор А. П. Черняев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, их якобиан. Теорема о системе неявных функций (без доказательства). Локальная обратимость отображения с ненулевым якобианом.

2. Экстремумы функций многих переменных: необходимое условие, достаточное условие. Условный экстремум функции многих переменных при наличии связей: исследование при помощи функции Лагранжа. Необходимые условия. Достаточные условия.

3. Кратный интеграл Римана. Суммы Римана и суммы Дарбу. Критерии интегрируемости. Интегрируемость функции, непрерывной на измеримом компакте. Свойства интегрируемых функций: линейность интеграла, аддитивность интеграла по множествам, интегрирование неравенств, теоремы о среднем, непрерывность интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному.

4. Формула Грина. Потенциальные векторные поля на плоскости. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

5. Геометрический смысл модуля и знака якобиана отображения двумерных пространств. Теорема о замене переменных в кратном интеграле (доказательство для двумерного случая).

6. Простая гладкая поверхность. Поверхностный интеграл первого рода. Независимость выражения интеграла через параметризацию поверхности от допустимой замены параметров. Площадь поверхности. Ориентация простой гладкой поверхности. Поверхностный интеграл второго рода, выражение через параметризацию поверхности. Кусочно-гладкие поверхности, их ориентация и интегралы по ним.

7. Формула Гаусса–Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее геометрический смысл. Соленоидальные векторные поля. Связь соленоидальности с обращением в нуль дивергенции поля.

8. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его геометрический смысл. Потенциальные векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Связь потенциальности с обращением в нуль ротора поля.

9. Оператор «набла» и действия с ним. Основные соотношения, содержащие вектор «набла».

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2013.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2007.

Дополнительная

5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. — Москва : Физматлит, 2004.
6. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2009.
7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. — Москва : Наука, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
9. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Т. 3. Функции нескольких переменных: учеб. пособие / под ред. Л. Д. Кудрявцева. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2003.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 21–26 октября)

I. Неявные функции

Т.1. Дано уравнение $x^2 = y^2$.

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

в) Сколько непрерывных функций $y : [1; 2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет этому уравнению?

§3: 60(1); 61(2); 64(2б); 69; 77.

§4: 43(3); 44(2).

Т.2. Для отображения $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$u=e^x\cos y,\quad v=e^x\sin y,$$

показать, что якобиан отображения всюду в $\mathbb{R}^2$ отличен от нуля, но отображение не является взаимно-однозначным. Найти множество значений отображения f.

II. Замена переменных

Т.3. Отображение задано соотношениями:

$$x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\ r>0.$$

Выразить частные производные r, φ по переменным x, y как функции r, φ .

§3: 85(5); 88(1); 90.
§4: 51(1), 53(2).

III. Экстремумы функций многих переменных

§5: 2(2); 9; 10*; 13(5); 18(2); 21(4); 25(3); 26(3); 28(4).

IV. Двойные интегралы

§8: 80(7); 83(1,5); 85(1); 90(4); 102(2); 107(3); 114(7); 115(3); 124(2); 110(1,3).
§9: 13(5); 14(5); 20(1).

V. Тройные и n-кратные интегралы

Т.4. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V xyz\,dxdydz$, где

$$V=\{x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x\geqslant 1,\ y\geqslant 1,\ z\geqslant 1\},$$

а) сведя интеграл к повторному каким-либо способом;
б) перейдя к сферическим координатам;
в) перейдя к цилиндрическим координатам.

§8: 133(3); 135(1)*; 144(1, 5); 146(1); 147; 148(3).

Т.5. Вычислить 4-мерный объем 4-мерного шара

$$\{(x_1,x_2,x_3,x_4):\sum_{i=1}^{4}x_i^2\leqslant R^2\},$$

а) применяя результат задачи 8.148(3);
б) воспользовавшись формулой

$$\int_X f(x_1,\dots x_n)dx_1\dots dx_n = \int_a^b dx_n \int_{X'(x_n)} f(x_1,\dots x_n)dx_1\dots dx_{n-1},$$

где $a = \inf_{x\in X}(x_n)$, $b = \sup_{x\in X}(x_n)$, а $X'(x_n) \subset R^{n-1}$— сечение X плоскостью $x_n = \mathrm{const}$, и $X \subset R^n$ — измеримые по Жордану множества.

§9: 14(2); 21; 15(2)); 16(3); 19(6).

§8: 175(2), 176(1), 179*, 180*; 181*.

(52+5*)

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Криволинейные интегралы. Формула Грина

§10: 17; 9; 35; 47; 61; 104(1).

T.1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_\gamma \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, где γ — простая замкнутая гладкая кривая, не проходящая через точку $(0;0)$, ориентированная против хода часовой стрелки.

II. Поверхностные интегралы

§9: 30; 38; 50; 51.

§11: 2(1); 6(2); 11; 32; 36(2); 38; 41(вычислить интегралы без использования формулы Гаусса-Остроградского).

III. Формулы Гаусса-Остроградского и Стокса

§11: 44(1); 45(2); 46(2); 52(1,3); 62; 63(2); 64.

IV. Элементы теории поля

§3: 36*; 44(5); 48(1).

§12: 13; 15(1, 3, 5); 37(2); 40(2); 41(4, 5, 7); 42(1); 49(4, 6); 50(3); 54(1); 56; 93(1); 94(5); 112(1, 2) (соленоидальность исследовать в объемно-односвязной области, не содержащей начало координат).

(45+1*)

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент М. Ю. Андреев