УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Вариативная часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа: 48 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова
к. ф.-м. н., доцент С. Р. Свирщевский
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнения Бернулли и Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Задача Коши.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Особое решение.
3. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда неоднородность представлена квазимногочленом (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
4. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для нормальной линейной системы уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной систем. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных и формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка. Краевые задачи. Теорема Штурма и следствия из нее. Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Свойства решений и фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем. Теорема о выпрямлении траекторий (*доказательство по усмотрению лектора*).
   Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.
   Поток А.М. Бишаева: групповое свойство автономных систем дифференциальных уравнений. Понятие фазового объема. Формула Лиувилля. Теорема Пуанкаре (*без доказательства*).

6. **Первые интегралы автономных систем. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы автономных систем. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.
   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамики, 2001.

2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.
4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С.)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск: 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф.)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Простейшие типы уравнений 1–го порядка

С. 2: <u>4</u>; 13; 34; 44*. **Ф.** 67*.

Ф. 109; <u>117</u>; 127.

С. 3: 21; <u>36</u>; 56; <u>90</u>. **Ф.** <u>147</u>; 181*.

С. 4: 2; 19; 54.

1. Решить уравнение: $y' = \dfrac{y^2}{x^3} + 2\dfrac{y}{x} - x$.

II. Уравнения, допускающие понижение порядка

С. 7: 2; 19; 33; 41; 45; 67*.

2. Решить задачу Коши:
$xy^2y'' + x^2y'^3 - xyy'^2 - 15y^2y' = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4.$

III. Задача Коши для уравнений в нормальной форме

Ф. 225 (а, б, в, г); 228 (а, б); 230; 231; 233*.

3. Решить уравнение, построить интегральные кривые, указать особые решения, найти (непродолжаемое) решение, удовлетворяющее условиям:

а) $y' = -y^2, \quad y(1) = -1;$
б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(-4) = -1, \quad y(2) = 1.$

Указать область определения решений. Объяснить с точки зрения теоремы существования и единственности, почему в случае а) решение уравнения однозначно определяется одним условием, а в случае б) – нет.

4*. Доказать, что любое решение $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$, задачи Коши $y' = x - y^2$, $y(1) = 0$ можно продолжить на интервал $(a, +\infty)$.

IV. Уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Ф. 278, 282 (в этих задачах решить уравнение, исследовать особые решения, построить интегральные кривые); 288.

С. 6: 25; 37.

5. Решить уравнение $27y^2 = (2y' + 3)(y' - 3)^2$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые. Найти решение, удовлетворяющее условиям: $y(-4) = -9$, $y(0) = 0$, $y(4) = 9$.

6. Решить уравнение $(y')^2 = 4y^3(1 - y)$, исследовать особые решения, построить интегральные кривые.

$\boxed{37+7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9—14 декабря)

I. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

С. 8: 4; 6; 13; <u>23</u>; 31; 37; <u>42</u>; <u>46</u>; 56; 57; 62; <u>154</u>; 163; 197; 200.

Ф. 613; 615; 617.

1. Решить уравнение $y^{IV} - a^4 y = \cos x$, где $a \geq 0$ — действительный параметр.

II. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. 11: 1; 7; 13; 18; 30; 44; 70; <u>76</u>; <u>89</u>; 87; 137; <u>154</u>; <u>177</u>.

III. Матричная экспонента

С. 11: 117; 125; 126 (для каждой системы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y(0) = 1$); 77.

2. Решить задачу Коши: $\dot{\bar{x}} = A\bar{x}$, $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix}$,

$a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ — заданные число и столбец,
$\bar{x}(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))^T$ — искомая вектор-функция.

3*. Доказать формулу: $\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}$.

IV. Операционный метод

С. 8: 172; <u>183</u>.

С. 11: <u>189</u>; 195.

$\boxed{39+1^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская