УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория групп**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Вариативная часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа: 45 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы. Теорема Лагранжа. Следствия из теоремы Лагранжа: порядок элемента и подгруппы, малая теорема Ферма, теорема Эйлера.
2. Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Нормальные подгруппы, фактор-группа. Теоремы о гомоморфизмах.
3. Действие группы на множестве, его свойства. Точность действия. Орбиты действия. Стационарные подгруппы (стабилизаторы). Формула орбит.
4. Примеры действия группы на множестве. Теорема Кэли о подгруппах симметрической группы. Стабилизатор элемента, нормализатор подгруппы.
5. Лемма Бернсайда о среднем количестве неподвижных элементов.
6. Группа автоморфизмов, нормальность подгруппы внутренних автоморфизмов.
7. Внешнее и внутреннее прямое произведение групп. Критерий разложимости группы в прямое произведение.
8. Центр группы, его свойства. Нецикличность фактор-группы по центру. Центр p-группы.
9. Коммутант группы. Разрешимые группы. Нильпотентные группы.
10. Свободная группа, её фактор-группы. Задание группы образующими и определяющими соотношениями.
11. Простые группы. Простота группы A_5.
12. Силовские подгруппы конечной группы. Теоремы Силова: существование силовских подгрупп, их сопряжённость, их количество. Вложимость любой p-подгруппы в силовскую. Основные применения теорем Силова.
13. Конечно – порождённые абелевы группы. Абелевы группы без кручения, их ранги и базисы. (Конечно – порождённая) свободная абелева группа. Периодическая часть абелевой группы. Классификация конечно-порождённых абелевых групп. Конечные подгруппы в мультипликативной группе поля.
14. Кольца и алгебры. Идеалы колец, фактор-кольца, основная теорема о гомоморфизме.

Литература

Основная

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 3. Основные структуры алгебры. — Москва : Физматлит, 2000; М. : МЦНМО, 2009.
2. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: Сборник задач по алгебре, под редакцией Кострикина А.И. — Москва : МЦНМО, 2015.

Замечания

Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Понятие группы. Симметрические группы

55.10; 55.19; 55.18(б); 55.23; 56.10(а, б); 56.14(а,б); 3.3(а,в); 3.4(б); 3.7(г,д); 3.11(а); 3.18; 56.7*.

1. Докажите, что две подстановки из S_n сопряжены тогда и только тогда, когда они имееют одинаковый циклический тип. Справедливо ли это утверждение для A_n?

II. Подгруппы, смежные классы

56.32(а,в); 56.34; 56.37(а,д,л); 56.38; 56.41; 56.45.

2. Говорят, что множество всех подгрупп группы G является цепью, если из любых двух подгрупп G одна содержится в другой.

а) Докажите, что множество всех подгрупп циклической группы G, $|G| = p^n$, p — простое число, является цепью.

б)* Опишите все конечные группы, множество всех подгрупп которых является цепью.

III. Нормальные подгруппы, гомоморфизмы

58.1(в,г); 58.4(а,в); 58.6; 58.11*; 58.18; 58.28(а,б,д); 58.29; 58.30(в,г); 58.33(б,е); 58.40*.

IV. Действие группы на множестве

55.26(а,б,в); 55.27; 57.3(а,б); 57.5(а); 57.18; 57.20(а,б); 57.21(а,б); 58.36*.

3*. Докажите, что группа вращений додекаэдра изоморфна A_5.

4*. Какой известной группе изоморфна группа вращений тессеракта (четырехмерного куба)?

V. Прямое произведение групп. Центр группы. Группа автоморфизмов

60.2(б,г); 60.5(а,б,в); 60.12; 60.14; 60.17*; 58.24(д,ж); 58.22*; 55.32(а,д); 57.40(б)*; 57.42*.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 2–7 декабря)

I. Коммутант. Разрешимые и нильпотентные группы

62.5; 62.7(в,г); 62.9; 62.11(а,г).

1*. Докажите, что если $N-$ нормальная подгруппа нильпотентной группы G и $N \neq \{e\}$, то $N \cap Z(G) \neq \{e\}$.

II. Образующие и соотношения

61.7(б,в); 61.10; 61.13; 61.18; 61.29; 61.33(а).

2*. Докажите, что группа $SL_n(Z)$ конечно порождена.

III. Силовские подгруппы

59.6(а,в); 59.8; 59.12; 59.13(а,б,г,д); 59.19; 59.22(а,в); 59.23*.

3*. Опишите с точностью до изоморфизма все неабелевы группы порядка 2019.

IV. Абелевы группы

60.2(в,г); 60.5(б,в); 60.10; 60.35; 60.39(д,з); 60.42(б,г); 60.50; 60.52(а,г) (также найти базис в A, согласованный с B).

V.* Кольца и алгебры. Идеалы и фактор–кольца

63.1(ж,з); 63.2(а,б); 63.4; 63.5; 63.13; 63.23(а,б); 64.1(а); 64.2(а); 64.3; 64.10(в); 64.41(б,в); 64.55(а,б)*.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин