УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 3

Трудоёмкость:
Базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 3 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Пространство элементарных событий. Вероятность.** Теоретико-множественная модель событий. Способы определения вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрические вероятности.
2. **Алгебры событий и свойства вероятности.** Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий. Теорема сложения.
3. **Условная вероятность и независимость.** Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.
4. **Последовательность независимых испытаний.** Схема Бернулли. Вероятностное пространство, описывающее схему Бернулли, и биномиальное распределение. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа. Полиномиальная схема и полиномиальное распределение.
5. **Дискретные случайные величины.** Индикаторы и их свойства. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Независимость случайных величин и мультипликативное свойство математического ожидания. Совместное распределение и ковариация. Свойства ковариации и коэффициента корреляции. Ковариационная матрица. Задача линейного оценивания и уравнение регрессии. Целочисленные случайные величины и производящие функции.
6. **Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства.** Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма–алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Общее определение случайной величины, функция распределения и плотность. Совместные функция распределения и плотность. Условия независимости случайных величин. Вычисление математического ожидания и дисперсии.
7. **Неравенство Чебышёва.** Неравенства Маркова и Чебышёва. Правило трех сигм. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышёва. Теорема Бернштейна о приближении полиномами непрерывной функции.
8. **Характеристические функции и центральная предельная теорема.** Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости (без доказательства). Центральная предельная теорема.

9. **Виды сходимости последовательностей случайных величин.** Теорема о видах сходимости последовательностей случайных величин. Закон больших чисел в форме Хинчина.
10. **Цепи Маркова.** Условия марковости и однородности в терминах переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова–Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
11. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона–Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией процесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.

Литература

1. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.
2. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
3. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
4. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1987.
5. *Ширяев А. Н.* Вероятность — 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.
7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.

Замечания

Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 07–12 октября)

I. Комбинации событий

Т.1. Пусть A, B, C — три события. Найти выражения для событий:

а) произошло только A;

б) произошли A и B, а C не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из них;

д) произошло только одно из них;

е) ни одно из них не произошло;

ж) произошло не более двух из них.

Т.2. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

Т.3. Пусть A, B — два события. Найти все события X такие, что $AX = AB$.

Т.4. Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

Т.5. Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

Т.6. Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

Т.7. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет подряд два раза одной стороной. Описать пространство элементарных исходов. Используя соображения симметрии, найти:

а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до шестого бросания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

Т.8. Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

Т.9. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

Т.10. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

Т.11. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число девушек и юношей?

Т.12. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

Т.13. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

Т.14. Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

Т.15. На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

Т.16. На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми L, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

Т.17*. На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

III. Условные вероятности. Формула полной вероятности

Т.18. Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

Т.19. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий и $C \subset \subset B$. Покажите, что A и $B \setminus C$ также независимы.

Т.20. В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

Т.21. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

Т.22. При рентгеновском обследовании вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна $1-\beta$, а вероятность принять здорового человека за больного равна α. Пусть доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна γ. Найти условную вероятность того, что человек здоров, если он признан больным при обследовании. Найти условную вероятность того, что человек болен, если он признан здоровым при обследовании? Найти численные значения этой вероятности, если $\alpha = 0,01$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,001$. (Эти значения приведены в книге: *Л.Закс.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976. – С. 49.)

Т.23. Из урны, содержащей M белых и N черных шаров, утеряно r шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

Т.24. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

Т.25. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

Т.26. Стрелок A поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6, стрелок B — с вероятностью 0,5 и стрелок C — с вероятностью 0,7. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее, попал C в цель или нет?

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 02–07 декабря)

I. Случайные величины и их характеристики

Т.1. Пусть S_n — число выпадений «герба» при n бросаниях монеты. Найти $\mathsf{E}S_n$ и $\mathsf{D}S_n$.

Т.2. Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть ξ — число бросаний. Найти распределение вероятностей ξ, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leqslant 5$?

Т.3. В N ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются n частиц. Пусть ξ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

T.4. Подбрасываются две игральные кости. Пусть ξ_1 — число очков, выпавших на первой игральной кости, а ξ_2 — на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$.

T.5. Игральная кость подбрасывается n раз. Пусть ξ — число появлений единицы, а η — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

T.6. Пусть ξ_k, $k = 1,\, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

T.7. Пусть ξ_k, $k = 1,\, 2,$ — независимые случайные величины, принимающие лишь целые неотрицательные значения, причем $\mathsf{P}(\xi_i = n) = pq^n$; $n = 0,\, 1,\, \dots$; $i = 1,\, 2$; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$. Найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ и условное распределение ξ_1, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

T.8. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

T.9. Привести примеры трех случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3, удовлетворяющих условиям:

$$\text{(a)} \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j, \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 \neq \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3;$$

$$\text{(b)} \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3, \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j \neq \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j.$$

T.10. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

T.11. В квадрат $\{(x_1,\, x_2)\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1,\, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть ξ_1, ξ_2 — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

T.12. Точка $(\xi,\, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,\, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

T.13. Точка $(\xi,\, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,\, y)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi,\, \eta\}$.

Т.14. Известно, что случайная величина ξ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

II. Закон больших чисел. Предельные теоремы. Характеристические и производящие функции. Цепи Маркова

Т.15. Случайная величина ξ имеет распределение, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \geq 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

Т.16. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

Т.17. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,1.$$

Т.18. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

Т.19. Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

Т.20. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

Т.21. Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t; \quad \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

Т.22. Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right) \mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x), \quad \alpha > 0.$$

Т.23*. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$.

Т.24. Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1, 2, \ldots, n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

Т.25*. Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2 соответственно остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-ой подгруппе было 20% населения, во 2-й подгруппе — 30%, и в 3-й подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

Т.26*. В биологических приложениях процессов Гальтона–Ватсона используется производящая функция

$$f(x) = px^2 + (1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Найти:

а) при каких значениях параметра p процесс является докритическим, критическим, надкритическим;

б) математическое ожидание и дисперсию n-го поколения;

в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

Т.27*. Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за n шагов и финальные вероятности.

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов