УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:
Базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа: 120 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Множества и действительные числа

1. Натуральные, целые, рациональные числа.
2. Основные понятия теории множеств. Объединение, пересечение и декартово произведение. Отображения и последовательности.
3. Пределы и фундаментальные последовательности рациональных чисел, определение действительных чисел.
4. Арифметические операции и сравнение действительных чисел.
5. Предел последовательности действительных чисел. Полнота множества действительных чисел (критерий Коши).

Свойства пределов последовательностей

6. Бесконечные пределы. Существование предела монотонной последовательности.
7. Переход к пределу в неравенствах, единственность предела последовательности.
8. Существование общей точки последовательности вложенных отрезков. Единственность общей точки для стягивающейся последовательности.
9. Точные грани числовых множеств: определение, существование и единственность. Другие определения действительных чисел.
10. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Предел суммы, разности, произведения и частного.

Определение элементарных функций

11. Неравенство Бернулли, экспонента и логарифм.
12. Тригонометрические функции, их определение и свойства. Неравенства $|\sin t| < |t| < |\operatorname{tg} t|$ при $0 < |t| < \frac{\pi}{2}$.

Частичные пределы, топология на прямой и мощности

13. Частичные пределы, верхний и нижний пределы. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Теорема о единственном частичном пределе.
14. Топология на множестве действительных чисел. Открытые, замкнутые и компактные множества. Критерий компактности.
15. Биекции и мощность множеств. Сравнение мощностей.
16. Теоремы о счётности множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и несчётности множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Непрерывные функции и их свойства

17. Непрерывность функции в точке. Определение по Коши и по Гейне.
18. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
19. Теорема о непрерывности композиции функций.

20. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
21. Непрерывность монотонного отображения промежутка на промежуток. Непрерывность обратной функции.
22. Топологическое определение непрерывности функции и его эквивалентность другим определениям.
23. Свойства функций, непрерывных на компактных множествах.

Пределы функций

24. Два определения предела функции (по Коши и по Гейне). Их эквивалентность.
25. Свойства пределов функций, связанные с неравенствами и арифметическими операциями.
26. Односторонние пределы. Теорема об односторонних пределах монотонных функций.
27. Критерий Коши существования предела функции.
28. Сравнение асимптотического поведения функций. Порядок функции, асимптотическая эквивалентность, символы o и O.

Производная и её свойства

29. Определение и геометрический смысл производной. Производные функций $\sin x$, $\cos x$, a^x, $\log_a x$.
30. Линейное приближение и дифференциал функции. Непрерывность дифференцируемой функции.
31. Производная суммы, разности, произведения и частного.
32. Производная композиции функций. Производная функции x^α. Инвариантность формы первого дифференциала.
33. Производная обратимой функции. Производные обратных тригонометрических функций. Производная функции, заданной параметрически.

Исследование функций с помощью производной

34. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля.
35. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении.
36. Условия постоянства, возрастания и убывания дифференцируемой функции.
37. Необходимые и достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.
38. Достаточное условие выпуклости дифференцируемой функции.
39. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида $0/0$.
40. Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей вида ∞/∞.

Производные высших порядков

41. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.
42. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
43. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
44. Разложения по формуле Тейлора элементарных функций: e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

Метрические пространства, их подмножества и топология

45. Метрические пространства, пределы последовательностей точек и полнота.
46. Евклидовы n-мерные пространства. Неравенства Коши–Шварца и треугольника, полнота евклидова пространства.
47. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах и их свойства.
48. Внутренность, замыкание и граница подмножества метрического пространства. Открытость внутренности, замкнутость замыкания и границы.
49. Индуцированная метрика и топология на подмножествах метрического пространства, относительно замкнутые и открытые множества.
50. Связные множества в метрических пространствах. Описание связных подмножеств числовой прямой.
51. Компактные множества в метрическом пространстве и критерий компактности в евклидовом пространстве.
52. Компактность и секвенциальная компактность в метрических пространствах.

Непрерывные отображения метрических пространств

53. Непрерывные отображения метрических пространств. Определение непрерывности в точке по Коши и по Гейне. Топологическое определение непрерывности на множестве.
54. Свойства непрерывных отображений, определённых на компакте и на связных множествах.
55. Расстояние между точкой и множеством и между двумя множествами в метрическом пространстве. Достаточное условие достижимости расстояния между множествами в евклидовом пространстве.
56. Кривые в метрическом пространстве и их конкатенация. Линейная связность метрического пространства, её сравнение со связностью и сохранение линейной связности при непрерывных отображениях.

57. Равномерно непрерывные отображения метрических пространств, модуль непрерывности. Теорема о равномерной непрерывности отображения на компакте.
58. * Полунепрерывные функции, достаточные условия достижимости минимума на компакте. Колебание функции в точке и его полунепрерывность.

Длина кривой в метрическом пространстве

59. Определение и свойство аддитивности длины дуги кривой.
60. Спрямляемые кривые. Непрерывная зависимость длины дуги кривой от параметра, натуральная параметризация кривой.
61. Спрямляемость непрерывно дифференцируемой кривой в евклидовом пространстве. Производная длины дуги по параметру и её физический смысл.
62. Кривизна и формулы Френе для кривой на евклидовой плоскости. Радиус кривизны, центр кривизны и эволюта.
63. Кривизна, главная нормаль и бинормаль кривой в $\mathbb{R}^3$. Кручение и формулы Френе для кривой ненулевой кривизны.

Многочлены с комплексными коэффициентами

64. Теорема о существовании комплексного корня многочлена с комплексными коэффициентами. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители.
65. Деление многочленов с остатком. Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя многочленов. Разложение рациональной функции на элементарные дроби.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)

2. Сборник задач по математическому анализу. Т. 2. Интегралы. Ряды: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 5 октября)

I. Натуральные, целые, рациональные и действительные числа

<u>Т.1</u>. Докажите, что всякое рациональное число однозначно представляется в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, а $q \in \mathbb{N}$.

Т.2. Докажите, что ни при каком натуральном $n > 1$ число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

не целое.

Т.3. Докажите, что если для действительного x число $x + \frac{1}{x}$ оказалась целым, то при любом натуральном n число

$$x^n + \frac{1}{x^n}$$

тоже будет целым.

Т.4. Найдите формулу без многоточий для суммы геометрической прогрессии при действительном $x \neq -1$:

$$1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n.$$

<u>Т.5</u>. Найдите формулу без многоточий для суммы при действительном $x \neq 1$:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n.$$

Т.6. Докажите формулу для любого натурального n:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

T.7. Докажите неравенство для любого натурального n:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n}-1.$$

T.8. Докажите, что три положительных действительных числа a, b, c являются длинами сторон некоторого треугольника тогда и только тогда, когда

$$a^4+b^4+c^4 < 2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2.$$

T.9*. Докажите, что для всякого действительного x и натурального Q найдётся целое p и натуральное $q \le Q$, такие что

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \le \frac{1}{Qq}.$$

II. Комплексные числа

C1, §5: 15(4); 25(4); 30(5); 32(5); 34(3).

T.10. Для данного натурального n найдите сумму всех биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ с k, делящих на три.

T.11. Пусть правильный n-угольник $A_0A_1\dots A_{n-1}$ вписан в единичную окружность. Найдите произведение длин отрезков

$$|A_0A_1|\cdot|A_0A_2|\dots|A_0A_{n-1}|.$$

T.12. Докажите, что если натуральные числа a и b представляются в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, то их произведение ab тоже представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

T.13*. На множестве четвёрок действительных чисел (a, b, c, d), записываемых в виде $a+ib+jc+kd$ (с формальными знаками i, j, k), введём умножение аналогично комплексным числам по более сложным правилам:

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=k, jk=i, ki=j, ji=-k, kj=-j, ik=-j,$$

это называется *кватернионы*. Докажите, что у всякого ненулевого кватерниона есть обратный относительно умножения.

III. Последовательности и их пределы

C1, §7: 275(5); 276(4); 300(3, 5).

C1, §8: 2(4) (по определению); 25(3); 27; 28; 46; 60; 67; 63(4); 71(1).

С1, §8: <u>64(3)</u>; 89; 90; 93(2); 141(4); 158.
С1, §8: <u>18</u>; 119; 123(2); 164(1); <u>246(2)</u>.

Т.14*. Пусть α — иррациональное число. Докажите, что последовательности $(\cos \pi\alpha n)$ и $(\sin \pi\alpha n)$ имеют множеством частичных пределов весь отрезок $[-1, 1]$.

$\boxed{40 + 3^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 4–9 ноября)

I. Топология на действительной прямой и мощность множества

Т.1. Докажите, если множество X действительных чисел состоит только из изолированных точек, то оно не более чем счётно.

<u>Т.2</u>. Докажите, что из всякого покрытия отрезка $[0, 1]$ интервалами можно выбрать подпокрытие, которое накрывает каждую точку отрезка не более чем два раза.

Т.3*. Докажите, что если множества $Z, Y \subseteq X$ открыты относительно X и не пересекаются, то найдутся непересекающиеся открытые $U, V \subseteq \mathbb{R}$, такие что $Z = X \cap U$ и $Y = X \cap V$.

Т.4. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ равномощен интервалу $(0, 1)$.

Т.5. Докажите, что для любого множества X множество всех подмножеств X, 2^X не равномощно X.

Т.6*. Докажите, что отрезок действительных чисел $[0, 1]$ равен по мощности $2^{\mathbb{N}}$.

II. Непрерывность функций

С1, §10: 5(6) (по определению); <u>22</u>; 23; 40; 48(1); 66*; <u>76</u>.

Т.7. Пусть непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ обладает свойством $f(x) > x$ для любого x. Докажите, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ последовательность, определённая как

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

стремится к $+\infty$.

Т.8. Пусть функция $f : [a, b] \to [a, b]$ непрерывна. Докажите, что найдется такая точка $x \in [a, b]$, для которой верно $x = f(x)$.

<u>Т.9</u>. Пусть непрерывная функция $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого α вида $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

имеет решение.

Т.10*. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ не равно никакому $1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Приведите пример непрерывной функции $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, которая имеет равные значения на концах отрезка $f(0) = f(1)$ и такой, что уравнение

$$f(x + \alpha) = f(x)$$

не имеет решений.

III. Пределы функций и разрывы

С1, §9: <u>16(3)</u>; 18(2); 25(2); <u>27(2)</u>; 30(2); <u>61</u>.

Т.11. Придумайте разрывную $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отображает любой отрезок в отрезок.

Т.12. Пусть функции f и g возрастают на всей прямой $\mathbb{R}$ и оказалось, что их сумма $f + g$ непрерывна. Докажите, что обе функции f и g тоже непрерывны.

IV. Приёмы вычисления производных

<u>Т.13</u>. Найдите производные гиперболических функций $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ и их обратных функций.

С1, §13: 62; <u>99</u>; 149.

V. Приёмы вычисления первообразных

С2, §1: <u>2(16)</u>; 13(7); <u>15(5)</u>; 17(4); <u>24(3)</u>.
С2, §2: 1(4); <u>2(1)</u>; <u>3(2)</u>; 4(2); 8(1)*.

Т.14. Найдите первообразные функций

а) $f(x) = \dfrac{1}{x(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$.

C2, §3: <u>2(7)</u>; 19(2).
C2, §4: <u>4(2)</u>; 21(3).
C2, §5: 49; <u>184</u>.

$\boxed{40 + 5^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Свойства производной и производные высших порядков

C1, §13: <u>173</u>; 179(3); 197(1); <u>201(4)</u>.
C1, §15: 14(2,4); 24($\underline{9}, 13$); 25($2, 5, \underline{10}$); 26(2).

II. Теоремы о среднем и исследование функций на экстремум

C1, §16: <u>5</u>; 15(2); 19; <u>30</u>.

T.1. Докажите, что если квазимногочлен $P(x)e^{ax}$ (где P — обычный многочлен и $a \neq 0$) имеет n различных корней, то его производная тоже имеет n различных корней.

T.2*. Докажите, что если функция имеет первообразную на интервале, то она переводит промежутки в промежутки.

<u>T.3</u>. Докажите неравенство

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

для положительных a, b, p, q, таких что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

T.4. Исследуйте, что больше при натуральном n:

$$e^x \quad \text{или} \quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}?$$

Рассмотрите случаи положительных и отрицательных x отдельно.

III. Вычисление пределов по правилу Лопиталя

<u>T.5</u>. Найдите с помощью правила Лопиталя значения пределов в зависимости от параметров a и b:
а) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a e^{bx}$;   б) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a \ln^b x$.

C1, §17: 63; <u>76</u>; 80^*.

IV. Формула Тейлора и вычисление пределов с её помощью

C1, §18: 3(9); 4(4); <u>5(4)</u>; 12(8); <u>20(5)</u>; 30(2); <u>39(7)</u>.

С1, §19: 8(<u>3</u>, 5); 21(3); <u>31(3)</u>.

V. Равномерная непрерывность

Т.6. Является ли равномерно непрерывной на своей области определения функция
а) $f(x) = \sqrt{x}$;   б) $f(x) = x \sin x$;   в) $f(x) = x \sin \ln x$?

Т.7. Докажите, что если функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, равномерно непрерывна, то она продолжается до непрерывной функции на замыкании множества X.

VI. Касательная, нормаль и кривизна кривой

С1, §24: 48; 78(1); 81(6); 122(1).

VII. Расстояние и метрические пространства

Т.8. Будет ли прямая $\mathbb{R}$ метрическим пространством, если расстояние определить как
а) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$;   б) $\rho(x, y) = (x - y)^2$?

Т.9. Докажите, что для любого метрического пространства M и его подмножества $S \subseteq M$ функция $f : M \to \mathbb{R}$, заданная как $f(x) = \operatorname{dist}(x, S)$, непрерывна.

Т.10. Докажите, что расстояния $\rho_1((x, y), (z, t)) = \sqrt{(x - z)^2 + (y - t)^2}$ и $\rho_2((x, y), (z, t)) = |x - z| + |y - t|$ на плоскости задают одну и ту же топологию.

$\boxed{42 + 2^*}$

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв
к. ф.-м. н., ассистент О. А. Загрядский