

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,**
03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **1**
семестр: **1**

Трудоёмкость:

Базовая часть — 6 зач. ед.;

лекции — 60 часов

практические занятия — 60 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
120 часов

Программу составили:

д. ф.-м. н., профессор О. В. Бесов
д. ф.-м. н., профессор Б. И. Голубов
д. ф.-м. н., профессор А. Л. Лукашов
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент В. П. Ковалев
к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенства между действительными числами. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.
2. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число ε . Теорема Кантора о вложенных отрезках. Бесконечно большие последовательности и их свойства.
3. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
4. Предел функции одной переменной. Определения по Гейне (в терминах последовательностей) и по Коши (в терминах окрестностей), их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.
5. Непрерывность функции в точке. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.
6. Свойства функций, непрерывных на отрезке, — ограниченность, достижение точных верхней и нижней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.
7. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.
8. Сравнение величин (символы o , O , \sim). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.
9. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной

и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

10. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n -й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.
11. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Роля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталю для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталю для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.
12. Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.
13. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.
14. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.
15. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Формула Эйлера. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т. 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.
12. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Москва : Мир, 1976.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость; учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды; учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 октября)

I. Действительные числа

С1, §4: 1(2); 2*.

Т.1. Доказать $\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$.

Т.2. Доказать для $x \geq 0, n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$.

Т.3. Найти сумму $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n$.

Т.4. Найти суммы

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$;

б)* $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$.

II. Комплексные числа

С1, §5: 4(4); 13(4); 18(5); 15(4); 30(1); 31(2); 32(2, 7).

III. Производная

С1, §13: 33; 60; 108; 148.

Т.5. Найти производную функции (ответ можно не упрощать)

$$y = \left(\frac{\arccos \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-\arccos^2 x}}{\operatorname{sh}(x^2 + 2e^{x^2})} \right)^{\ln x}.$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(5); 279(1); 300(3).

С1, §8: 2(2) (по определению); 13(3); 18; 25(1); 27; 28*; 46; 49.

С1, §8: 91; 53(3); 74(1); 7; 71(1); 60(для всех $a > 0$); 67; 63(4).

С1, §8: 119; 120*; 116(2); 117(1); 141(1); 143(1); 147(4); 158; 164(1); 220; 246(1, 2*).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §7: 218(5); 219(3).

С1, §9: 1(1); 7(2); 16; 18; 25(1); 26(1); 27(2); 30(2); 35(4); 61.

С1, §10: 5(7) (по определению); 14; 22; 23; 40(1); 41(1); 42; 46; 47*; 66*; 76; 49*.

**Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям**

1 неделя	C1, §4: 1(2); 2*; T1; T2; T3; T4. C1, §5: 4(4); 13(4); 18(5); 15(4); 30(1); 31(2); 32(2, 7).
2 неделя	C1, §13: 33; 60; 108; 148; T5. C1, §7: 275(4); 276(5); <u>279(1)</u> ; 300(3).
3 неделя	C1, §8: 2(2); 13(3); 18; 25(1); 27; 28*; 46; <u>49</u> . C1, §8: 91; 53(3); 74(1); 7; 71(1); 60; 67; 63(4).
4 неделя	C1, §8: <u>119</u> ; 120*; 116(2); 117(1); 141(1). C1, §8: 143(1); 147(4); 158; 164(1); 220; 246(1, 2*).
5 неделя	C1, §7: 218(5); 219(3). C1, §9: <u>1(1)</u> ; 7(2); <u>16</u> ; 18; 25(1); 26(1); 27(2); 30(2); 35(4); <u>61</u> .
6 неделя	C1, §10: <u>5(7)</u> (по определению); 14; <u>22</u> ; 23; 40(1); <u>41(1)</u> ; 42; 46; 47*; 66*; 76; 49*.

74 + 9*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 18–23 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

C1, §13: 197(3); 201(2); 214(2); 173; 179(4).

C1, §14: 10(1).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

C1, §15: 1(5); 10(1); 13(4); 14(3); 22(1); 24(5, 9, 13); 25(2, 5, 10);
26(2, 5*).

III. Теоремы о среднем

C1, §16: 5; 15(2); 19; 33; 30; 20*.

IV. Формула Тейлора

C1, §9: 50; 51.

T.1. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \rightarrow 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \rightarrow 0$.

T.2. Докажите, что если при $x \rightarrow 0$ $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \rightarrow 0$.

T.3. При каких $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $x^2 - 4x + 4 = o(x^2 - 3x + 2)$ при $x \rightarrow x_0$?

T.4. Разложите по формуле Тейлора в точке $x = 0$ с точностью до $o(x^5)$ функцию $(x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

C1, §18: 2(8); 3(2, 5); 4(5); 5(5); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7).

T.5. Представить формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:

а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \operatorname{arcsin} x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов

C1, §17: 27; 63; 76; 80*.

C1, §19: 7(1); 8(4); 14(5); 21(4); 30(4); 47(3); 58*(2).

Рекомендации по решению

второго домашнего задания по неделям

1 неделя	C1, §13: 197(3); 201(2); 214(2); <u>173</u> ; 179(4). C1, §14: 10(1).
2 неделя	C1, §15: 1(5); 10(1); 13(4); 14(3); 22(1); 24(5, <u>9</u> , 13); 25(2, 5, <u>10</u>); 26(2, 5*); C1, §16: <u>5</u> ; 15(2); <u>19</u> ; <u>33</u> ; 30; 20*.
3 неделя	C1, §9: 50; 51; T1; T2; T3; T4. C1, §18: 2(8); 3(2, 5); 4(5); 5(5); 14(3); 20(7); 30(2); 39(4, 7); T5.
4 неделя	C1, §17: 27; 63; <u>76</u> ; 80*. C1, §19: 7(1); 8(4); <u>14(5)</u> ; 21(4); <u>30(4)</u> ; 47(3); 58*(2).

49 + 4*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 9–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

C1, §12: 2(1); 3(3, 5*); 4(3, 4, 8*); 7; 17; 23; 25; 28*.

T.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I , то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \rightarrow +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в)* если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I , то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I (привести примеры).

II. Исследование функций

C1, §20: 2(3); 20(4); 23(4); 33^{*}; 39(5); 49(4); 69(2, 5); 71(5)^{*}.

III. Построение графиков функций

C1, §21: 4(5); 5(2); 9(1); 10(3); 12(1, 10); 13(9); 15(4); 23(4)^{*}; 31(2)^{*}.

IV. Элементы дифференциальной геометрии

C1, §24: 48; 51; 78(3); 81(3); 85^{*}; 109(2); 122(1); 14^{*}, 118^{*}; 142^{*}.

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	C1, §12: 2(1); 3(3, 5 [*]); 4(3, 4, 8 [*]); 7; 17; 23; 25; 28 [*] ; T1. C1, §20: 2(3); 20(4); 23(4); 33 [*] ; 39(5); 49(4); 69(2, 5); 71(5) [*] .
2 неделя	C1, §21: 4(5); 5(2); 9(1); 10(3); 12(1, 10); 13(9); 15(4); 23(4) [*] ; 31(2) [*] .
3 неделя	C1, §24: 48; 51; 78(3); 81(3); 85 [*] ; 109(2); 122(1); 14 [*] , 118 [*] ; 142 [*] .

33 + 10^{*}

Составитель задания

к. ф.-м. н., ассистент О. А. Загрядский