

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и довузовской подготовке
А. А. Воронов
25 июня 2019 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Алгебра и геометрия
по направлению
подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: ФПМИ
кафедра: высшей математики
курс: 1
семестр: 1

Трудоёмкость:

Базовая часть — 4 зач. ед.:

лекции — 60 часов

практические занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
60 часов

Программу составил

к. ф.-м. н., доцент И. И. Богданов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 22 мая 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Коллинеарные, компланарные векторы. Линейные операции с векторами и их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия над векторами в координатах. Связь между линейной зависимостью, коллинеарностью и компланарностью векторов. Изменение координат при замене базиса.
2. Общая декартова система координат, прямоугольная (ортонормированная) система координат. Связь между координатами направленного отрезка и координатами его конца и начала. Замена декартовой системы координат, формулы перехода.
3. Скалярное произведение, его свойства, выражение в ортонормированном и произвольном базисе. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.
4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Ориентированные площадь и объём (смешанное произведение). Свойства ориентированных площади и объёма. Выражение смешанного произведения в произвольном базисе. Векторное произведение, его свойства, выражение в правом ортонормированном базисе. Критерии коллинеарности и компланарности векторов. Двойное векторное произведение.
5. Понятие об уравнении множества. Алгебраические линии и поверхности; пересечение и объединение алгебраических линий (поверхностей). Сохранение порядка при переходе к другой системе координат.
6. Прямая на плоскости, различные способы задания, их эквивалентность. Формула для расстояния от точки до прямой в прямоугольной системе координат. Условия пересечения и параллельности двух прямых. Пучок прямых.
7. Плоскость в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Условие параллельности двух плоскостей. Направляющий вектор пересечения двух плоскостей. Пучок плоскостей. Прямая в пространстве, различные способы задания, их эквивалентность. Формулы для расстояния от точки до плоскости и расстояния между скрещивающимися прямыми в прямоугольной системе координат.
8. Эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения. Теоремы о фокусах и директрисах. Асимптоты гиперболы. Сопряжённые диаметры. Касательные к эллипсу, параболе и гиперболе.
9. Классификация линий второго порядка. Приведение уравнения второго порядка с двумя переменными к каноническому виду в прямоугольной системе координат. Центр многочлена второго порядка.

Линейные пространства. Матрицы и определители

1. Матрицы, операции с матрицами, их свойства.
2. Понятия группы, кольца и поля. Примеры. Порядок элемента. Циклические группы, их подгруппы. Изоморфизм групп, теорема Кэли. Теорема Лагранжа о порядке подгруппы, её следствия. Характеристика поля, простое подполе. Группа перестановок, знак перестановки. Поле комплексных чисел, модуль и аргумент комплексного числа.
3. Линейное пространство. Понятие линейно (не)зависимой системы векторов. Подпространство линейного пространства. Линейная оболочка системы векторов, её характеристика.
4. Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы, элементарные матрицы, их свойства. Приведение матрицы к ступенчатому и упрощенному виду. Достаточное условие существования нетривиального решения у однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы.
5. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Теорема об изоморфизме. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
6. Мощность конечного векторного пространства и конечного поля. Количество базисов и подпространств конечного линейного пространства.
7. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Ранг произведения матриц. Нахождение ранга с помощью элементарных преобразований. Теорема о базисном миноре. Невырожденные и обратимые матрицы. Нахождение обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Теорема Кронекера–Капелли.
8. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеристика. Прямое дополнение подпространства. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств.
9. Линейные функции. Сопряжённое (двойственное) пространство, его размерность. Взаимный (биортогональный) базис, координаты в нём, замена координат при замене базиса. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Аннуляторные подпространства, их свойства.

10. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства, их матрицы. Ядро и образ линейного отображения, их размерности. Критерий инъективности линейного отображения. Операции над линейными отображениями (преобразованиями) и их матрицами, обратное линейное преобразование. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при замене базисов.
11. Полилинейные и кососимметричные функции. Определитель матрицы, задание определителя его свойствами, явное выражение определителя через элементы матрицы. Поведение определителя при элементарных преобразованиях. Определитель произведения матриц и транспонированной матрицы. Разложение определителя по строке, столбцу. Решение систем линейных уравнений и нахождение обратной матрицы методом Крамера.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. — Москва : Физматлит, 2004.
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009.
4. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : МЦНМО, 2013.
5. *Челлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2005.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт Петербург : Лань, 2008. (цитируется С)

Замечания

Задачи, отмеченные * , являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 7–12 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков

С: 15.2(5, 6); 15.5(1, 2, 7).

Т.1. Вычислите $c_{109}^T(A_{140} - A_{141})c_{24}$.

Т.2. Найдите $|A_8|, |A_{178}|, |A_{205}|, |A_{210}|$.

Векторы. Скалярное, векторное и смешанное произведения

II. Линейные операции и линейная зависимость

С: 1.10; 1.11(1, 3); 1.12; 1.23(1, 3); 1.27; 1.37; 1.28(1, 3).

III. Скалярное произведение

С: 2.7(4); 2.9(1); 2.11; 2.20; 2.25; 2.27(2); 2.32; 2.38.

Т.3*. Найдите сумму алгебраических значений ортогональных проекций вектора \vec{a} на оси \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} , если треугольник ABC правильный.

IV. Векторное и смешанное произведения

С: 3.1(1); 3.2(1); 3.8(1); 3.12; 3.13(3); 3.16; 3.17(2); 3.23(1, 2); 3.25(2); 3.26(1, 3, 5); 3.28; 3.31.

Т.4. Для каждой грани тетраэдра построен вектор, направленный перпендикулярно грани вне тетраэдра, с длиной, численно равной площади этой грани. Докажите, что сумма четырёх построенных векторов равна нулю.

Т.5. Пользуясь правилом Крамера, решите системы 17.1(2, 4).

Т.6. Решите уравнение $[\vec{a}, \vec{x}] + [\vec{x}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}]$ относительно неизвестного вектора \vec{x} , считая векторы \vec{a} и \vec{b} известными ($\vec{a} \nparallel \vec{b}$).

V. Замена базиса и системы координат

С: 4.1(1, 2); 4.4; 4.12; 4.19; 4.26(2).

Прямая и плоскость

VI. Векторные уравнения

С: 5.1; 5.3; 5.4; 6.1(1, 3, 5); 6.2; 6.4; 6.8; 6.10(1, 3); 6.11(2, 4, 7, 9); 6.12.

VII. Общая декартова система координат

С: 5.7(1, 2); 5.19; 6.16(2); 6.28; 6.38(3).

VIII. Прямоугольная система координат

С: 5.31; 5.35; 5.55; 5.61*; 6.50; 6.60; 6.61(3); 6.64(3); 6.72(2); 6.80; 6.73(3)*.

IX. Кривые второго порядка

С: 9.1(2, 5); 9.4(4, 6, 10); 9.16(1, 4); 9.19(3).

Т.7. Найдите фокусы, директрисы и асимптоты кривых 9.4(6, 10).

Т.8. Дана кривая $3x^2 + 6xy - 4x - 2y = 0$. Найдите уравнение прямой, содержащей середины хорд, параллельных прямой $2x + y = 2$. Проверьте, что эта прямая проходит через центр кривой.

С: 7.25(3, 8); 7.26(3); 7.29; 7.38(4); 7.40(2); 7.50; 7.54(2); 7.62(2, 4).

С: 8.3(3); 8.9(3); 8.12(1); 8.28(1); 8.30(2); 8.31*.

Т.9. Найдите множество точек, получаемых при отражении фокуса параболы относительно её касательных.

Т.10*. Докажите, что гиперболы с одинаковым эксцентриситетом подобны, а с разным — нет.

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 15.2(5, 6); 15.5(1, 2, 7); Т.1; Т.2. С: 1.10; 1.11(1, 3); 1.12; 1.23(1, 3); 1.27; 1.37; 1.28(1, 3). С: 2.7(4); 2.9(1); 2.11; 2.20; 2.25; 2.27(2); 2.32; 2.38; Т.3*.
2 неделя	С: 3.1(1); 3.2(1); 3.8(1); 3.12; 3.13(3); 3.16; 3.17(2); 3.23(1, 2); 3.25(2); 3.26(1, 3, 5); 3.28; 3.31; Т.4; Т.5; Т.6. С: 4.1(1, 2); 4.4; 4.12; 4.19; 4.26(2).
3 неделя	С: 5.1; 5.3; 5.4; 6.1(1, 3, 5); 6.2; 6.4; 6.8; 6.10(1, 3); 6.11(2, 4, 7, 9); 6.12. С: 5.7(1, 2); 5.19; 6.16(2); 6.28; 6.38(3).
4 неделя	С: 5.31; 5.35; 5.55; 5.61*; 6.50; 6.60; 6.61(3); 6.64(3); 6.72(2); 6.80; 6.73(3)*. С: 9.1(2, 5); 9.4(4, 6, 10); 9.16(1, 4); 9.19(3); Т.7; Т.8.
5 неделя	С: 7.25(3, 8); 7.26(3); 7.29; 7.38(4); 7.40(2); 7.50; 7.54(2); 7.62(2, 4). С: 8.3(3); 8.9(3); 8.12(1); 8.28(1); 8.30(2); 8.31*; Т.9; Т.10*.

106 + 5*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 25–30 ноября)

I. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы. Действия с матрицами

С: 16.23; 16.18(18, 22, 29) (также найти в каждой матрице базисный минор); 16.34(4, 6); 16.41*.

С: 17.4; 19.4; 19.6(18, 37, 42); 19.7(3); 19.8*; 19.15; 19.21; 18.17(2); 18.19*; 19.23.

Т.1. Докажите, что любая матрица ранга r представляется в виде суммы r матриц ранга 1.

Т.2*. Дана прямоугольная таблица. В граничных её клетках расставлены рациональные числа. Докажите, что во всех внутренних клетках также можно расставить рациональные числа так, чтобы каждое число во внутренней клетке было равно среднему арифметическому чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону.

С: 15.45(1, 2); 15.54(2, 5, 8, 10); 15.56* ; 15.65(5)* .

Т.3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = 2; \\ 2x + y + 3z + 5t = 1; \\ 7x + 4y - 2z + 5t = 5 \end{cases}$$
 над полем F_{13} .

Т.4*. Система линейных уравнений с целыми коэффициентами имеет рациональное решение. Докажите, что она имеет решение по модулю p для всех, кроме конечного количества, простых p .

II. Линейные пространства

С: 20.6(2, 4, 6); 20.8(3); 20.14(6, 7); 20.18; 20.20; 20.22(6); 20.23(4, 6); 20.24(3); 20.29(2, 3).

С: 21.2; 21.3(2); 21.7(5, 8, 9); 21.6(5); 21.11; 21.12(1, 2).

Т.5. а) В системе \mathcal{M} подмножеств n -элементного множества вместе с любыми двумя подмножествами $A, B \in \mathcal{M}$ содержится их симметрическая разность $A \Delta B$. Докажите, что количество элементов в \mathcal{M} есть степень двойки.

б) В предыдущей задаче найдите количество таких множеств \mathcal{M} мощности 2^k .

Т.6*. Пусть V — 10-мерное пространство над F_3 , а U — его 5-мерное подпространство. Найдите количество прямых дополнений к U в V .

III. Линейные функции. Линейные отображения и преобразования

С: 31.16; 31.21; 31.22* ; 31.30; 31.31(3); 31.35(1).

Т.7. Докажите, что функции $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx$ линейно независимы.

С: 23.6(4); 23.10(3); 23.14(3); 23.24(1, 3); 23.29(4); 23.40(1(б, в)); 23.62(4, 7); 23.64(4); 23.70(3, 4); 23.75.

Т.8*. Пусть $A: U \rightarrow V$ — линейное отображение. Докажите существование такого линейного отображения $B: V \rightarrow U$, что выполняются равенства $ABA = A, BAB = B$.

Т.9*. Пусть $A : L \rightarrow L$. Доказать, что $L = \text{Ker } A \oplus \text{Im } A$ тогда и только тогда, когда $\text{Ker } A^2 = \text{Ker } A$.

**Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям**

1 неделя	С: 16.23; 16.18(18, 22, 29) (также найти в каждой матрице базисный минор); 16.34(4, 6); 16.41*. С: 17.4; 19.4; 19.6(18, 37, 42); 19.7(3); 19.8*.
2 неделя	С: 19.15; 19.21; 18.17(2); 18.19*; 19.23; Т.1; Т.2*. С: 15.45(1, 2); 15.54(2, 5, 8, 10); 15.56*; 15.65(5)*; Т.3; Т.4*.
3 неделя	С: 20.6(2, 4, 6); 20.8(3); 20.14(6, 7); 20.18; 20.20; 20.22(6); 20.23(4, 6); 20.24(3); 20.29(2, 3).
4 неделя	С: 21.2; 21.3(2); 21.7(5, 8, 9); 21.6(5); 21.11; 21.12(1, 2); Т.5(а, б); Т.6*.
5 неделя	С: 31.16; 31.21; 31.22*; 31.30; 31.31(3); 31.35(1); Т.7.
6 неделя	С: 23.6(4); 23.10(2); 23.14(3); 23.24(2, 3); 23.29(3); 23.6(4); 23.10(3); 23.14(3); 23.24(1, 3); 23.29(4); 23.40(1(б, в)); 23.62(4, 7); 23.64(4); 23.70(3, 4); 23.75; Т.8*; Т.9*.

74 + 10*

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 16–21 декабря)

I. Определители порядка n

С: 14.15; 14.21(3, 5, 6); 14.23(6, 8, 11, 18); 14.24(5, 7, 8*); 14.29*; 14.31(2); 14.43(1, 2)*.

Т.1*. Найдите необходимые и достаточные условия, при которых обратная к целочисленной матрице A также целочисленная.

Т.2.а) Каждый элемент матрицы A размера 1000×1000 равен либо 1, либо -1 . Докажите, что $\det A$ делится на 2^{999} .

б)* Пусть дополнительно в каждой строке матрицы чётное число единиц. Докажите, что тогда $\det A$ делится на 2^{1000} .

Группы. Изоморфизм групп. Подгруппы. Поля

Т.3. Выясните, какие из указанных множеств с операциями являются группами:

а) $(\mathbb{N}, +)$;

- б) $(\mathbb{Z}, +)$;
- в) $(n\mathbb{Z}, +)$;
- г) множество комплексных чисел модуля r относительно умножения;
- д)* непрерывные монотонные функции $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющие условиям $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, относительно композиции;
- е) полуинтервал $[0, 1)$ относительно операции \oplus , где $\alpha \oplus \beta$ — это дробная часть числа $\alpha + \beta$;
- ж) все инъективные отображения $\sigma: [n] \rightarrow [n]$, где $[n] = \{1, \dots, n\}$, относительно композиции;
- з) все инъективные отображения $\sigma: [n] \rightarrow [n]$, переводящие простые числа в простые, относительно композиции;
- и) невырожденные матрицы порядка n относительно умножения;
- к) невырожденные матрицы порядка n относительно сложения;
- л) верхнетреугольные матрицы порядка n с единицами на главной диагонали относительно умножения;
- м)* верхнетреугольные матрицы с нулями на главной диагонали относительно операции $X \circ Y = X + Y - XY$.

Т.4. а) Изоморфны ли группы б), в) из предыдущей задачи?

б) Какие из групп г), е), и) из предыдущей задачи изоморфны?

в)* Тот же вопрос про группы к), л), м).

Т.5*. Пусть (G, \cdot) — группа, a — произвольный её элемент. Определим $x \circ y = xay$. Докажите, что (G, \circ) — группа, изоморфная G .

Т.6. Для каких групп G отображение $\varphi: G \rightarrow G$, $\varphi(x) = x^{-1}$ является изоморфизмом?

Т.7. Пусть a — элемент порядка n . Докажите, что порядки элементов a^k и a^ℓ равны тогда и только тогда, когда $(k, n) = (\ell, n)$.

Т.8. а) Докажите, что порядки элементов x и $y^{-1}xy$ равны.

б) Докажите, что порядки элементов ab и ba равны.

в)* Обязательно ли равны порядки элементов abc и cba ? А элементов abc и bca ?

Т.9. Пусть G — абелева группа. Докажите, что все её элементы, порядки которых делят n , образуют подгруппу.

Т.10. Пусть x и y — элементы порядков k и ℓ , причём $(k, \ell) = 1$ и $xy = yx$. Докажите, что порядок элемента xy равен $k\ell$.

Т.11. Докажите, что существует поле:

- а) из 4 элементов;
- б) из 9 элементов;
- в)* из p^2 элементов при любом простом p .

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 14.15; 14.21(3, 5, 6); 14.23(6, 8, 11, 18); 14.24(5, 7, 8*); 14.29*; 14.31(2); 14.43(1, 2)*; Т.1*; Т.2(а, б*).
2 неделя	Т: Т.3(а, б, в, г, д*, е, ж, з, и, к, л, м*); Т.4(а, б, в*); Т.5*; Т.6; Т.7; Т.8(а, б, в*); Т.9; Т.10; Т.11(а, б, в*).

32 + 12*

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент И. И. Богданов