МФТИ, 1 курс, 5 ноября 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Найти $f^{(n)}$ если

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x}$$

1.2. Найти y'_x и y''_{xx} в точке $x = 2\sqrt{2}$ для параметрически заданной функции $y(x)$:

$$x(t) = 4\sin t, \quad y(t) = \sin 4t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

1.3. Пусть I – промежуток, функции f и g дифференцируемы на I. Докажите
a) если $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) \equiv C$, где C – константа
b) если $f'(x) \equiv g'(x)$, то $f(x) \equiv g(x) + C$, где C – константа.

2.1. Найти $f^{(n)}$, если

$$a) \quad f(x) = 3\cos x \cdot \cos 3x$$

$$b) \quad f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot \ln(x^2 - 3x + 2)$$

2.2. Докажите неравенства

$$a) \quad e^x \geqslant ex,$$

$$b) \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \ \ \forall x > 0,$$

2.3. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b) = 0$. Кроме того, каждый нуль производной также является нулём функции, т.е. $\{x : f'(x) = 0\} \subset \{x : f(x) = 0\}$. Доказать, что f равна нулю тождественно на $[a, b]$.

2.4. Пусть функция f дифференцируема на интервале (a, b). Пусть также f' – ограничена на (a, b). Доказать, что f ограничена на (a, b).

3.1. Пусть функция f дифференцируема на некотором интервале, внутри которого лежит интервал (a, b).
1) Пусть $f'(a)$ и $f'(b)$ имеют разные знаки. Доказать, что $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.
2) Доказать, что f' принимает на (a, b) все значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.
3) Доказать, что f' не может иметь разрывов первого рода ни в одной точке.

3.2. Пусть функция f непрерывна на (a, b) и дифференцируема на (a, b) всюду, кроме, быть может, точки $c \in (a, b)$. Пусть предел $\lim\limits_{x \to c} f'(x) = L \in \mathbb{R}$. Доказать, что f дифференцируема в точке c и $f'(c) = L$.