

**МФТИ, 1 курс, 28-29 октября 2019 года**  
**Практикум по Введению в математический анализ.**

1.1. Найти производную функции в каждой точке по определению

$$f(x) = \cos x$$

1.2. Пусть функция

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & \text{если } x \leq 1; \\ x^2, & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

всюду дифференцируема. Найти параметры  $a$  и  $b$ .

1.3. Доказать по определению, что функция

$$f(x) = \sqrt{x}$$

дифференцируема при  $x > 0$ .

2.1. Пусть функция  $f$  определена на  $\mathbb{R}$  и дифференцируема в точке  $x_0$ . Верно ли, что

- а)  $f$  дифференцируема в некоторой окрестности  $x_0$ ?
- б)  $f$  непрерывна в некоторой окрестности  $x_0$ ?

2.2. Гиперболический тангенс определяется следующим образом  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ . Функция, обратная к гиперболическому тангенсу называется аретангенсом и обозначается  $\operatorname{arth} x$ . Найти  $(\operatorname{arth} x)'$

2.3. Исследовать на непрерывную дифференцируемость в каждой точке функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

в зависимости от параметра  $\alpha$

2.4. Найти касательную в точке  $(x_0, y_0)$  к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3.1. Пусть функция  $f$  определена на  $\mathbb{R}$ , ограничена на  $\mathbb{R}$  и терпит разрыв в каждой точке. Исследовать на непрерывность и на дифференцируемость функцию

$$g(x) = x^2 f(x)$$

3.2. Пусть функция  $f$  определена на  $\mathbb{R}$  и всюду дифференцируема

- а) пусть существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , верно ли, что существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ ?
- б) пусть существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ , верно ли, что существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ?

3.3. Построить пример функции  $f$ , определённой на  $\mathbb{R}$ , всюду дифференцируемой и такой, что  $f'$  непрерывна всюду, кроме точек 0 и 1.