МФТИ, 1 курс, 21-22 октября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Исследовать функцию f на непрерывность, указать тип точек разрыва (если они существуют)

$$f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$$

1.2. Используя определение производной $\left(f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$, в каждой точке найти производную или доказать, что её не существует.
a) $f(x) = x^2$,
b) $g(x) = |x|$.

1.3. Функции f и g определены на отрезке $[0,2]$, причём f непрерывна на этом отрезке, а g ограничена на нём. Известно, что $f(1) = 0$. Докажите, что функция $f \cdot g$ непрерывна в точке $x = 1$.

2.1. Вычислить производную функции f, если

$$f(x) = \left(x^2\right)^{\sin\left(x^2\right)}$$

2.2. Пусть D есть функция Дирихле. Исследовать функцию

$$g(x) = x^2 \cdot D(x)$$

1) на непрерывность в каждой точке,
2) на наличие производной в каждой точке.

2.3. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Может ли она
a) переводить интервал (0,1) в отрезок [0,1]?
b) переводить отрезок [0,1] в интервал (0,1)?
c) переводить промежуток $(0, +\infty)$ в отрезок [0,1]?
d) переводить промежуток $[0, +\infty)$ в интервал (0,1)?

3.1. Функция $f : [a,b] \to [a,b]$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать или опровергнуть.
1) На отрезке $[a,b]$ найдётся точка x, такая, что $f(x) = x$.
2) На интервале (a,b) найдётся точка x, такая, что $f(x) = x$.

3.2. Модулем непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ называется функция ω,определяемая при $\delta > 0$ следующим образом:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta,\, x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|,$$

т.е. верхняя грань разности значения функции по всевозможным парам точек x_1, x_2 множества E, удаленным друг от друга меньше чем на δ.
a) Покажите, что модуль непрерывности — неубывающая неотрицательная функция.
b) Вычислите модуль непрерывности для функций x и $\sin x^2$, рассматриваемых на $\mathbb{R}$.