МФТИ, 1 курс ФОПФ, 14-15 октября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Сформулировать следующие утверждения в терминах определения предела по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) и в терминах определения предела по Гейне (на языке последовательностей):

$$a)\ \lim_{x\to a-0} f(x) = b,$$

$$b)\ \lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty,$$

$c)$ функция f не имеет в точке a ни конечного, ни бесконечного предела

1.2. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$. Исследовать функцию на наличие односторонних пределов в точке 0. Является ли функция бесконечно большой при $x \to 0$?

1.3. Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

на существование предела в каждой точке.

2.1. Пользуясь первым и вторым замечательными пределами $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, вычислите

$$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad b)\ \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{2x-\pi}.$$

2.2. Опишите множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, подчиняющихся следующим условиям для всех значений x_1, x_2:

$$a) \forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 \quad x_1 - x_2 < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$b) \exists\varepsilon > 0 \quad \forall\delta > 0 \quad |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

2.3. Пусть

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ \ldots + b_m},$$

где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

3.1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$ и $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = a$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = a$?

3.2. Пусть f определена и монотонна на $\mathbb{R}$. Доказать, что множество точек её разрыва не более, чем счётно.

3.3. Функция f определена на $(0, +\infty)$. При иррациональных x $f(x) = x$, а при $x = p/q$, где p/q - несократимая дробь, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ выполняется $f(x) = (p+1)/(q+1)$. Исследовать f на существование предела в каждой точке и непрерывность на $(0, +\infty)$.