МФТИ, 1 курс, 14-15 октября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Сформулируйте «в кванторах»:
a) утверждение «функция f непрерывна слева в точке 2»,
b) отрицание утверждения «функция f непрерывна на всей числовой прямой».

1.2. Доказать по определению, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, если

$$f(x) = x^2 - 3$$

1.3. Приведите пример непрерывной на интервале I функции
а) неограниченной на I,
б) ограниченной на I, но не достигающей ни своей верхней, ни своей нижней грани.

1.4. Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, причём $f(a) = b$, а $f(b) = a$. Докажите, что на отрезке $[a, b]$ найдётся точка x, такая, что $f(x) = x$.

2.1. Функция f определена на $\mathbb{R}$. Может ли она быть
a) непрерывной при $x = 1$ и разрывной при $x \neq 1$?
b) непрерывной при $x \neq 1$ и разрывной при $x = 1$?
c) непрерывной при $x \in \mathbb{Z}$ и разрывной при $x \notin \mathbb{Z}$?

2.2. Функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$ и имеет равные конечные пределы при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Доказать, что достигается по крайней мере одно из значений: её супремум на $\mathbb{R}$ или её инфимум на $\mathbb{R}$.

2.3. a) Функция f определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, и все её значения положительны. Доказать, что существует число $m > 0$, такое, что $f(x) \geqslant m$ для любого $x \in [a, b]$.

b) Функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, причём для любого $x \in [a, b]$ верно, что $f(x) > g(x)$. Верно ли, что существует $m > 0$, такое, что для любого $x \in [a, b]$ выполняется $f(x) > g(x) + m$?

2.4. Пусть $[x]$ означает целую часть x (наибольшее целое число, не превосходящее x), $\{x\} = x - [x]$. Доказать, что функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, если

$$f(x) = [x] \cdot \{x\} \cdot (1 - \{x\})$$

3.1. Докажите, что уравнение $\sin x = e^x$ имеет бесконечно много действительных решений.

3.2. Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция g определена на отрезке $[0, 1]$. Известно, что для любого x на $[0, 1]$ $f(g(x)) = x$. Обязательно ли g непрерывна хотя бы в одной точке?

3.3. Назовём промежутком множество $I \subset \mathbb{R}$ такое, что если $a \in I, b \in I$, то $[a, b] \subset I$.

а) пусть функция f определена и непрерывна на промежутке I; верно ли, что $f(I)$ – промежуток?

б) пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$, пусть для некоторого $S \subset \mathbb{R}$ множество $f(S)$ является промежутком; верно ли, что S – промежуток?