МФТИ, 1 курс ФОПФ, 7-8 октября 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Докажите, что отрезок $[a, b]$ равномощен отрезку $[c, d]$ $(a < b, c < d)$.

1.2. Докажите, что функция, произвольно определенная на множестве, состоящем только из изолированных точек, непрерывна на нём.

1.3. Пусть f непрерывна на $\mathbb{R}$. Докажите, что $\{x : f(x) = 0\}$ замкнутое подмножество $\mathbb{R}$.

2.1. Пусть n – фиксированное натуральное число. Какую мощность имеет множество

$$a)\, \mathcal{P}_n = \Big\{ P_n(x) = a_n x^n + \,\ldots\, + a_1 x + a_0 : a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{Q} \Big\}, \qquad b)\, \mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_n?$$

2.2. Докажите теорему: функция $f(x)$ непрерывна на $(0{,}1)$ тогда и только тогда, когда для любого y множества $\{x : f(x) < y\}$ и $\{x : f(x) > y\}$ открыты.

2.3. Приведите пример функции, которая определена на всей числовой прямой и является непрерывной только в конечном наборе точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

3.1. Докажите, что все нижеперечисленные множества равномощны:
1) $\mathbb{R}$
2) $[0{,}1]$
3) $(0{,}1)$
4) $2^{\mathbb{N}}$
5) множество всех последовательностей, состоящих из чисел 0 и 1
6) множество всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, непрерывных на $\mathbb{R}$
7) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

3.2. Пусть $A \subset (0{,}1)$, $B \subset (0{,}1)$ – замкнуты относительно $(0{,}1)$. Пусть также $A \cup B = (0{,}1)$.
Пусть функции $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ непрерывны и верно, что $\forall x \in A \cap B :\ f(x) = g(x)$.
Определим функцию f^+g:

$$(f^+g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in A; \\ g(x), & \text{если } x \in B. \end{cases}$$

а) Доказать, что f^+g непрерывна на $(0{,}1)$.
б) Доказать, что требование замкнутости A и B существенно.