МФТИ, 1 курс, 7-8 октября 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Сформулировать следующие утверждения в терминах определения предела по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$) и в терминах определения предела по Гейне (на языке последовательностей):

$$a)\ \lim_{x \to a-0} f(x) = b,$$

$$b)\ \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

$c)$ функция f не имеет в точке a ни конечного, ни бесконечного предела

1.2. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

не ограничена в любой окрестности точки $x = 0$. Исследовать функцию на наличие односторонних пределов в точке 0. Является ли функция бесконечно большой при $x \to 0$?

1.3. Вычислить

$$\lim_{x \to a} \frac{7x^2 - 4x - 3}{x(x-1)}$$

при $a)a = 1, \quad b)a = 0, \quad c)a = -1.$

1.4. Вычислить

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{x+4}}.$$

2.1. Исследовать функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

на существование предела в каждой точке.

2.2. Найдите a и b из условия, если известно, что

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0.$$

2.3. Пользуясь первым и вторым замечательными пределами $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, вычислите

$$a)\ \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad b)\ \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{2x - \pi}.$$

3.1. Опишите множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, подчиняющихся следующим условиям для всех значений x_1, x_2:

$$a)\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad x_1 - x_2 < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

$$b)\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

3.2. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$ и $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = a$. Следует ли отсюда, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = a$?