

МФТИ, 1 курс, 30 сентября, 1 октября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов только данные числа a_1, a_2, \dots, a_p .

1.2. Подпоследовательности $\{x_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют пределы a и b соответственно ($a \neq b$). Докажите, что множество частичных пределов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит только из чисел a и b .

1.3. Для последовательности

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

найдите

$$\inf x_n, \quad \sup x_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

2.1. Используя критерий Коши, докажите, что последовательность сходится

$$x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2. Используя критерий Коши, докажите, что последовательность расходится

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

2.3. Дана сходящаяся числовая последовательность a_n .

а) построить пример числовой последовательности такой, что множество её частичных пределов содержит все элементы a_n ;

б) какие еще частичные пределы **обязательно** имеет построенная последовательность?

2.4. Верно ли, что точка $a \in \mathbb{R}$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, если

а) в любой её окрестности есть элемент последовательности?

б) в любой её проколотой окрестности есть элемент последовательности?

Проколотой окрестностью точки a радиуса ε называется множество $(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$, т.е. окрестность точки за исключением самой точки.

3.1. Может ли множество а) $A = (0, 1)$; б) $B = [0, 1]$ быть множеством частичных пределов некоторой последовательности? В случае утвердительного ответа приведите пример такой числовой последовательности.

3.2. Докажите, что последовательность

$$x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ корней}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad c > 0,$$

сходится, и найдите ее предел.

3.3. Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.