МФТИ, 1 курс, 23-24 сентября 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ. ФОПФ

1.1. Исследуйте последовательности на сходимость по определению

$$a)\, x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}, \qquad b)\, y_n = 1 + (-1)^n.$$

1.2. Докажите, что последовательность является бесконечно большой

$$x_n = (-2)^n.$$

1.3. Пусть

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 0?$$

2.1. Вычислите следующие пределы

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right]; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+3^n}{n+8^n}}.$$

2.2. Пусть $x_1 = 0.1$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$ для всех $n \geqslant 1$.
Исследовать последовательность $\{x_n\}$ на сходимость и найти предел, если он существует.

2.3. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

3.1. Найдите пределы последовательностей

$$a)\ \ x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}; \qquad b)\ \ y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad c)\ \ z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

3.2. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает хотя бы одной из своих точных граней – верхней или нижней.

3.3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m > 0$ – фиксированные числа. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_m^n}.$$