МФТИ, 1 курс, 23-24 сентября 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Докажите по определению, что

$$a)\ \lim_{n\to\infty} x_n = A, \text{ если } \exists\, N\in\mathbb{N}\quad \forall n \geqslant N, n\in\mathbb{N}\quad x_n = A; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

1.2. Докажите по определению расходимость последовательности

$$x_n = 1 + (-1)^n.$$

1.3. Пусть

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \text{или} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = 0?$$

2.1. Доказать, что монотонно возрастающая с некоторого номера числовая последовательность достигает своей точной нижней грани.

2.2. Докажите, что последовательность является бесконечно большой, определив для всякого $C > 0$ число $N\in\mathbb{N}$, такое, что $|x_n| > C$ при $n > N$.

$$x_n = (-2)^n$$

2.3. Вычислите следующие пределы

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right]; \qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2+3^n}{n+8^n}}.$$

3.1. Найдите пределы последовательностей

$$a)\ x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}; \qquad b)\ y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}; \qquad c)\ z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

3.2. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает хотя бы одной из своих точных граней – верхней или нижней.

3.3 Пусть $a\in\mathbb{R}$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$