

Практикум по курсу “Введение в математический анализ, ФОПФ”, занятие 2,  
16-17.09.2019

Тема: Ограниченность последовательности, предел последовательности.

1.1. Исследовать ограниченность последовательностей по определению:

$$\text{i) } x_n = \frac{2n-1}{2+n}, \quad \text{ii) } x_n = n^2 - n.$$

1.2. Доказать, что последовательность  $\frac{n+1}{2n-1}$  монотонна, начиная с некоторого номера.

1.3. Доказать по определению:

$$\text{i) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2+n} = 2, \quad \text{ii) } \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = +\infty.$$

1.5. Является ли последовательность  $\{x_n\}$  ограниченной, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R} : |x_n| \leq M?$$

Ответ обосновать.

1.6 Равносильно ли утверждение «существует такое натуральное число  $N$ , что для любого  $\varepsilon > 0$  и для любого  $n \geq N$  справедливо неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ », утверждению, «число  $a$  является пределом последовательности  $\{x_n\}$ ».

Сформулируйте свойство, которому удовлетворяет такая последовательность.

Ответы обосновать.

2.1. Доказать по определению, что последовательность  $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$  ограничена.

2.2. Доказать по определению, что последовательность  $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 - n + 1}}$  сходится.

2.3. Доказать по определению, что последовательность  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$  расходится.

2.4. Найти  $\inf \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$  и  $\sup \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ . Полученные результаты доказать по определению.

2.5. а) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$ , где  $a > 0$ .

б) Найти  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$ .

2.6. Доказать, что множество целых чисел, кратных 3, счётно.

3.1. Исследовать на счётность множество многочленов с целыми коэффициентами.