Практикум по курсу "Введение в математический анализ", занятие 2, 16-17.09.2019

Тема: Вычисление производных, ограниченность последовательности.

1.1. Найти первые производные функций (ответ можно не упрощать):

$$\text{i) } h(x) = \arcsin(\ln x) - x + \arccos(\ln x), \quad \text{ii) } f(x) = \ln(\sin x),$$
$$\text{iii) } g(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \ln \frac{10 - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}{10 + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)}.$$

1.2. Найти первую производную функции (ответ не упрощать!):

$$f(x) = \ln \left(\frac{\arcsin x}{x^2+1} + \frac{e^{\operatorname{ctg} 1/x} \cos 5x}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{\operatorname{tg} \sqrt{2+x^3}}.$$

1.3. Исследовать ограниченность последовательностей по определению:

$$\text{i) } x_n = \frac{2n-1}{2+n}, \quad \text{ii) } x_n = n^2 - n.$$

1.4. Доказать, что последовательность $\dfrac{n+1}{2n-1}$ монотонна, начиная с некоторого номера.

1.5. Является ли последовательность $\{x_n\}$ ограниченной, если

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R}: \ |x_n| \leqslant M?$$

Ответ обосновать.

1.6 Сформулировать, используя символы $\forall$, $\exists$, утверждение о том, что последовательность $\{x_n\}$ не является возрастающей.

2.1. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$ ограничена.

2.2. Найти $\inf \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$ и $\sup \left\{ \frac{\ln n}{n} \right\}$. Полученные результаты доказать по определению.

2.3. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}$ — непустые ограниченные множества такие, что $B \subset A$. Доказать, что $\inf A \leqslant \inf B$.

2.4. Сформулировать, используя символы $\forall$, $\exists$, утверждение о том, что последовательность $\{x_n\}$ не является монотонной, и доказать, что последовательность $x_n = n + (-1)^n$ немонотонна.

2.5. Доказать, что последовательность $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ ограничена.

2.6. Доказать, что множество целых чисел, кратных 3, счётно.

3.1. Исследовать на счётность множество многочленов с целыми коэффициентами.