МФТИ, 1 курс, 2–3 декабря 2019 года
Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Доказать по определению, что функция

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

не является равномерно непрерывной на $(0, 1)$.

1.2. Доказать по определению, что функция

$$f(x) = x^2$$

а) равномерно непрерывна на $(0, 1)$,

б) не является равномерно непрерывной на $(0, +\infty)$.

1.3. Пусть функция f определена на множестве $S \subset \mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$\exists L > 0\ \forall x_1, x_2 \in S \quad \big(|f(x_1) - f(x_2)| < L \cdot |x_1 - x_2|\big)$$

Доказать, что f – равномерно непрерывна на S.

2.1. Исследовать на равномерную непрерывность данную функцию на данном промежутке:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{на } [0, +\infty)$$

2.2. Исследовать на равномерную непрерывность данную функцию на данном промежутке:

$$f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x} \quad \text{на } (1, +\infty)$$

2.3. Пусть функции f, g равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Доказать или опровергнуть равномерную непрерывность функций:

$$a) \quad f + g, \qquad b) \quad f \cdot g, \qquad c) \quad f \circ g$$

2.4. Пусть f равномерно непрерывна на множестве $S \subset \mathbb{R}$. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ фундаментальна. Доказать, что последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна.

3.1. Пусть функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Доказать, что существуют $A, B \geqslant 0$ такие, что

$$|f(x)| \leqslant A|x| + B$$

3.2. Пусть функция f дифференцируема на $[a, +\infty)$. Верно ли, что если производная f' не ограничена на $[a, +\infty)$, то f не является равномерно непрерывной?

3.3. Модулем непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ называется функция ω, определяемая при $\delta > 0$ следующим образом:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x_1 - x_2| < \delta,\, x_1, x_2 \in E} |f(x_1) - f(x_2)|$$

Доказать, что f – равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(\delta) \to 0$.