МФТИ ФОПФ, 1 курс, 11–12 ноября 2019 года

Практикум по Введению в математический анализ.

1.1. Доказать асимптотические неравенства для натуральных n, m при $x \to 0$.

$$a)\ x^{n+1} = o(x^n), \quad b)\ o(x^n)\cdot o(x^m) = o(x^{n+m}), \quad c)\ o(x^n) + o(x^m) = o(x^{\min\{n,m\}})$$

1.2. Найти y'_x и y''_{xx} в точке $x = 2\sqrt{2}$ для параметрически заданной функции $y(x)$:

$$x(t) = 4\sin t, \quad y(t) = \sin 4t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

1.3. Верны ли утверждения

$$a)\quad e^x = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

$$b)\quad e^{\sin x} = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

$$c)\quad e^{\cos x} = 1 + o(1) \text{ при } x \to 0$$

2.1. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \frac{1}{1 - x + x^2 - x^3}$$

2.2. Разложить по формуле Тейлора в точке $x_0 = -2$ до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = (x^2 + 4x + 7)e^{x/2}$$

2.3. Исследовать на непрерывную дифференцируемость в каждой точке функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

в зависимости от параметра α

2.4. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ при наибольшем возможном n функцию

$$f(x) = |\sin x - x|$$

3.1. Пусть функция f определена на $\mathbb{R}$, ограничена на $\mathbb{R}$ и терпит разрыв в каждой точке. Исследовать на непрерывность и на дифференцируемость в каждой точке функцию

$$g(x) = x^2 f(x)$$

3.2. Построить пример функции f, определённой на $\mathbb{R}$, всюду дифференцируемой и такой, что f' непрерывна всюду, кроме точек 0 и 1.

3.3. Разложить по формуле Маклорена до $o(x^n)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$